# **BAB IV**

# **HASIL PENELITIAN**

## **4.1 Hasil Penelitian**

 Pada bab ini akan dibahas untuk bilangan kromatik kelas graf yang dikaji. Bahwasannya telah diketahui sebelumnya graf yang dikaji dalam penelitian ini adalah graf bintang $(S\_{n})$, graf Komplit $(K\_{n})$, dan graf *cycle* $(C\_{n})$ yang akan dioperasikan menggunakan operasi Korona $(⊙)$ dan akan dibentuk menjadi dua buah kelas graf yakni graf $(S\_{m}⊙K\_{n})$ dan graf $\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)$. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis akan menguraikan mengenai bilangan kromatik permainan pada graf $(S\_{m}⊙K\_{n})$ yang disimbolkan $χ\_{g}(S\_{m}⊙K\_{n})$ dan bilangan kromatik permainan pada graf $\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)$ yang disimbolkan $χ\_{g}(S\_{m}⊙C\_{n})$.

### **4.1.1 Aturan Bilangan Kromatik Permainan**

 Menurut (Bohman et al., 2008) bilangan kromatik permainan adalah permainan pewarnaan titik pada graf $G$ yang dilakukan dua orang pemain misal $P$ sebagai pemain pertama yang tugas utamanya mewarnai semua simpul yang ada dengan warna yang disediakan dan $Q$ sebagai pemain kedua yang bertugas menghalangi $P$ untuk bisa mewarnai seluruh simpul yang ada pada graf $G$. $P$ dan $Q$ secara bergiliran mewarnai simpul-simpul $G$ satu per satu menggunakan himpunan warna $C=\{1,2,3,….,k\}$ sehingga simpul tetangga mendapatkan warna yang berbeda. Selanjutnya, jika $P$ mewarnai menggunakan $C$ sedemikian hingga masing-masing simpul $v$ dan simpul yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama, maka $P$ menjadi pemenang permainan dengan kata lain $P$ menang jika di akhir permainan semua simpul $G$ berwarna. Bilangan kromatik permainan dari graf $G$ yang dinotasikan dengan $χ\_{g}(G)$ memiliki pengertian sebagai bilangan $k$ terkecil yang dapat menyebabkan $P$ memiliki strategi untuk memenangkan permainan terhadap $Q$ pada graf $G$ menggunakan $k$ warna, dengan aturan sebagai berikut:

1. Pemain pertama $(P)$ memulai permainan dengan mewarnai sembarang titik pada graf $G$ menggunakan warna yang telah disediakan $C=\{1,2,…,k\}$ sedemikian sehingga dapat mewarnai seluruh titik yang terdapat pada graf $G$. Pemain kedua $(Q)$ mendapat giliran setelah pemain pertama mewarnai sembarang titik. $Q$ mewarnai titik pada graf $G$ menggunakan warna yang disediakan sedemikian hingga memiliki tujuan untuk menggagalkan $P$ mewarnai semua titik yang ada pada graf $G$ yakni dengan sedikitnya sebuah titik pada graf $G$ tidak dapat terwarnai.

### **4.1.2 Graf Corona** $\left(S\_{m}⊙K\_{n}\right)$

1. **Konstruksi dan Karakteristik Graf** $S\_{m}⊙K\_{n}$

Graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ dibentuk dari dua buah graf yakni graf *Star* $(S\_{m})$ dengan $m\geq 1$ dan graf komplit $(K\_{n})$ dengan $n\geq 1$ dimana graf $S\_{m}$ selaku graf pusat dan graf $K\_{n}$ sebagai komponen graf kemudian dioperasikan menggunakan operasi korona (terpusat). Graf $S\_{m}$ dan graf $K\_{n}$ dihubungkan menggunakan sisi (*edge*) penghubung sebanyak $n$ *copy*. Tanpa mengurangi perumuman, misal diberikan graf $S\_{5}⊙K\_{4}$ sebagai berikut:



Gambar 4.1 Graf $S\_{5}⊙K\_{4}$

 Pada Gambar 4.1, dapat dilihat bahwa graf $S\_{5}$ sebagai graf pusat dengan $\{v\_{1},v\_{2},v\_{3},v\_{4},v\_{5}\}$ yang merupakan himpunan simpul pada graf tersebut, kemudian graf $K\_{4}$ sebagai komponen graf sebanyak $m$ *copy* sehingga ada 4 buah graf komplit yang terhubung dengan masing-masing simpul $v\_{1},v\_{2},v\_{3},v\_{4},v\_{5}$. Dari Gambar 4.1 juga diperoleh derajat terkecil yang dinotasikan dengan $δ\left(S\_{5}⊙K\_{4}\right)=4$ dapat dilihat pada simpul yang ada pada graf $K\_{4}$ yakni himpunan simpul $\{v\_{1,1},v\_{1,2},…,v\_{5,4}\}$. $\{v\_{2},v\_{3},v\_{4},v\_{5}\}$ merupakan himpunan simpul berderajat 5 yang saling lepas. Sedangkan untuk derajat terbesar graf $S\_{5}⊙K\_{4}$ yang dinotasikan $∆\left(S\_{5}⊙K\_{4}\right)=8$, dapat dilihat dari simpul pada graf $S\_{5}$ tepatnya pada simpul $v\_{1}$. Himpunan simpul berderajat 4 $\{v\_{2,1},v\_{2,2},…v\_{5,4}\}$ bertetangga dengan simpul berderajat 5, sedangkan himpunan simpul berderajat 4 yang lain dalam hal ini $\{v\_{1,1},v\_{1,2},v\_{1,3},v\_{1,4}\}$ bertetangga dengan simpul dengan derajat tertinggi atau $v\_{1}$. Kemudian simpul berderajat 5 bertetangga dengan simpul berderajat tertinggi dan terendah. Kardinalitas sisi penghubung pada graf $S\_{5}⊙K\_{4}$ sebanyak 20 dapat dinotasikan dengan $|S\_{5}⊙K\_{4}|=20$, dapat dilihat dari himpunan sisi $\{v\_{1}v\_{1,1},v\_{1}v\_{1,2},…,v\_{5}v\_{5,4}\}$ yang dinyatakan sebagai himpunan sisi pada graf $S\_{5}⊙K\_{4}$.

 Contoh lain pada graf korona antara graf *Star* dan graf Komplit juga memiliki konstruksi dan karakteristik yang sama, tanpa mengurangi perumuman, misal pada graf $S\_{4}⊙K\_{3}$ graf pembentuknya juga sama seperti graf $S\_{5}⊙K\_{4}$ yakni graf *Star* sebagai graf pusat dalam hal ini graf $S\_{4}$ dan graf komplit sebagai komponen graf nya yang ditunjukkan oleh graf $K\_{3}$, memiliki derajat terkecil yang dinotasikan $δ\left(S\_{4}⊙K\_{3}\right)=3$, beberapa simpul memiliki derajat 4, serta derajat terbesar yang dinotasikan $∆\left(S\_{4}⊙K\_{3}\right)=6$ dan kardinalitas sisi penghubungnya sebanyak 12.

 Beberapa contoh kasus lain pada graf korona antara graf *Star* dan graf komplit akan selalu memiliki konstruksi dan karakteristik yang sama dan hampir tidak ada perbedaan sama sekali. Dengan demikian akan ditunjukkan bentuk umum dari konstruksi dan karakteristik graf korona antara graf *Star* dan graf komplit yang akan ditunjukkan oleh gambar graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ gambar berikut ini:



Gambar 4.2 Graf $S\_{m}⊙K\_{n}$

 Dari Gambar 4.2 dapat diketahui bahwa graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ dibentuk dari graf *star* $(S\_{m})$ sebagai graf pusat dan graf komplit $(K\_{n})$ sebagai komponen graf yang dihubungkan dengan sisi (*edge*) penghubung sebanyak $m$ *copy* yang menghubungkan tiap simpul pada graf *star* $(S\_{m})$ dan setiap simpul pada graf komplit $(K\_{n})$, hal ini dapat dilihat dari $\{v\_{1}v\_{1,1},v\_{1}v\_{1,2},…,v\_{m}v\_{m,n}\}$ sebagai himpunan sisi penghubungnya. Dari Gambar 4.2 juga diperoleh beberapa karakteristik simpul-simpul yang ada pada graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ tersebut. Derajat terkecil yang dinotasikan $δ\left(S\_{m}⊙K\_{n}\right)=n$, dapat dilihat dari himpunan simpul yang terdapat pada komponen graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ tepatnya pada graf $(K\_{m})$ yakni $\{v\_{1,1},v\_{1,2}, …,v\_{m,n}\}$. Himpuanan simpul yang kedua $\left\{v\_{2},v\_{3},v\_{4},…,v\_{m}\right\}$ adalah simpul-simpul yang memiliki derajat $n+1$ yang saling lepas. Sedangkan derajat terbesar dari graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ yang dinotasikan dengan $∆\left(S\_{m}⊙K\_{n}\right)$ adalah $m+n-1$ hal ini diperoleh dengan memperhatikan simpul pada graf pusat yakni graf $S\_{m}$ tepatnya pada simpul $v\_{1}$.

 Himpunan simpul berderajat $n$ yakni $\{v\_{2,1},v\_{2,2},…v\_{m,n}\}$ bertetangga dengan simpul berderajat $n+1$, sedangkan himpunan simpul berderajat $n$ yang lain dalam hal ini $\{v\_{1,1},v\_{1,2},…,v\_{1,n}\}$ bertetangga dengan simpul dengan derajat tertinggi atau $v\_{1}$. Kemudian simpul berderajat $n+1$ bertetangga dengan simpul berderajat tertinggi dan terendah. Kardinalitas sisi penghubung pada graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ yang dinotasikan dengan $\left|S\_{m}⊙K\_{n}\right|=mn$.

1. **Bilangan Kromatik Graf Corona** $S\_{m}⊙K\_{n}$

 Merujuk teorema sebelumnya, (Yusuf et al., 2022) mengungkapkan bahwa $χ\left(S\_{m}⊙K\_{n}\right)=n+2$ dan dibuktikan sebagai berikut:

 Diketahui bahwa $χ\left(S\_{m}\right)=2$, untuk $m\geq 1$. Oleh karena itu graf $S\_{m}$ pada graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ dapat diwarnai cukup dengan 2 warna. Misal, $C=\{1,2\}$ adalah himpunan warna untuk graf $S\_{m}$. Kemudian untuk $m$ copy graf $K\_{n}$ tidak dapat menggunakan warna yang ada di $C$ hal ini dikarenakan $m$ copy graf $K\_{n}$ terhubung dengan verteks daun dan verteks pusat yang ada pada graf $S\_{m}$. Sebagaimana diketahui $χ\left(K\_{n}\right)=n$ dan graf $K\_{n}$ merupakan graf $n-1$ reguler dengan verteks saling terhubung satu sama lain maka untuk mewarnai verteks $K\_{n}$ memerlukan warna tambahan sesuai $n$. Maka untuk menentukan $χ(S\_{m}⊙K\_{n})$ dapat dicari dengan cara menambahkan $χ(K\_{n})$ dengan 2 pada $C$. Dengan demikian $χ(S\_{m}⊙ K\_{n}) = n+2∎$

Namun setelah penulis melakukan analisis lebih lanjut, ditemukan kekeliruan pada Teorema tersebut. Oleh karena itu akan dilakukan perbaikan dengan menggunakan teorema berikut:

**Teorema 4.1**

$χ\left(S\_{m}⊙K\_{n}\right)=n+1$, untuk $m\geq $, $n\geq 1$

**Bukti:**

Diketahui bahwa $χ\left(S\_{m}\right)=2$, untuk $m\geq 1$, $χ\left(K\_{n}\right)=n$, untuk $n\geq 1$. Misal diberikan himpunan $n$ warna untuk mewarnai seluruh warna pada graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ yang dinotasikan dengan $C=\{1,2,3,…,n+1\}$. Dengan memperhatikan himpunan warna yang disediakan untuk mewarnai simpul pada graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ jika warna yang disediakan minimal $n+1$ warna dan $∆\left(S\_{m}⊙K\_{n}\right)=m+n-1$ maka pada graf $S\_{m}$ dipastikan dapat diwarnai dengan $n+1$ warna yang disediakan, namun jika diperhatikan pada Gambar 4.2 untuk mewarnai simpul dengan derajat terbesar tepatnya simpul $v\_{1}$ yang bertetangga langsung dengan simpul berderajat $n$ yakni $\{v\_{1,1},v\_{1,2},…v\_{1,n-1}\} $memerlukan setidaknya satu warna tambahan sehingga untuk mewarnai graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ dengan $∆\left(S\_{m}⊙K\_{n}\right)=m+n-1$ memerlukan setidaknya $n+1$ warna agar dapat terwarnai seluruh simpulnya, begitu juga dengan kasus lain pada graf korona $S\_{m}⊙K\_{n}$ akan selalu memiliki pola yang sama dalam penentuan bilangan kromatiknya. Dengan demikian $χ(S\_{m}⊙K\_{n})=n+1∎$.

1. **Bilangan Kromatik Permainan graf Corona** $S\_{m}⊙K\_{n}$

**Teorema 4.2**

$χ\_{g}\left(S\_{m}⊙K\_{n}\right)=n+1, untuk m\geq 1, n\geq 1$

**Bukti**:

Berdasarkan Teorema (Bartnicki et al., 2008) dalam (Mujib, 2019) yang mengatakan jika $S\_{m}⊙K\_{n}$ adalah graf dengan derajat terbesar $∆\left(S\_{m}⊙K\_{n}\right)=m+n-1$, dimana $m\geq 1, n\geq 1$ maka $χ\left(S\_{m}⊙K\_{n}\right)\leq χ\_{g}\left(S\_{m}⊙K\_{n}\right)\leq ∆\left(S\_{m}⊙K\_{n}\right)+1$. Akan ditunjukkan bahwa $n+1\leq χ\_{g}\left(S\_{m}⊙K\_{n}\right)\leq m+n$. misal diberikan $n+1$ warna yakni himpunan $C=\{1,2,3,…,n+1\}$, maka penentuan bilangan kromatik permainan graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ dengan memandang Gambar 4.2 akan ditunjukkan melalui beberapa kasus sebagai berikut:

**Kasus I**:

Langkah pertama $P$ mewarnai simpul dengan derajat terbesar atau simpul $v\_{1}$ dengan derajat $m+n-1$ dimana $m\geq 1$, $n\geq 1$ dengan menggunakan warna 1 sedangkan $Q$ melakukan langkah pertama dengan dua kemungkinan yakni:

**Sub Kasus I.1**: $Q$ mewarnai simpul berderajat $n+1$ dengan warna 2 akibatnya karena simpul dengan derajat $n+1$ saling lepas sehingga $P$ selalu bisa mewarnai simpul dengan derajat yang sama menggunakan warna yang sama yakni warna 2.

**Sub Kasus I.2**: $Q$ melakukan langkah pertama dengan mewarnai simpul berderajat $n$ dengan warna 2, akibatnya $P$ akan selalu bisa mewarnai simpul tersisa pada simpul berderajat $n$ dengan $n+1$ warna yang disediakan.

**Kasus II**:

Langkah pertama $P$ mewarnai simpul dengan derajat $n+1$ dengan warna 1, selanjutnya langkah pertama $Q$ memilki 2 kemungkinan yakni:

**Sub Kasus II.1**: $Q$ mewarnai simpul dengan derajat $n+1$ sama halnya dengan yang dilakukan $P$, akibatnya simpul $P$ akan terbantu untuk menyelesaikan seluruh pewarnaan pada simpul berderajat $n+1$ tersebut dengan cara mewarnai simpul menggunakan warna yang sama seperti yang digunakan $Q$. Selanjutnya $P$ hanya perlu memastikan simpul berderajat terbesar terwarnai dan simpul berderajat $n$ dapat dijamin bisa terwarnai dengan $n+1$ warna.

**Sub Kasus II.2**: $Q$ mewarnai simpul berderajat tertinggi yakni $m+n-1$ dengan warna 2 akibatnya $P$ akan terbantu untuk dapat mewarnai seluruh simpul yang ada pada Graf $S\_{m}⊙K\_{n}$, dan kemungkinan $P$ untuk memenangkan permainan akan lebih besar karena $P$ hanya perlu memastikan simpul berderajat $n$ pada komponen graf terwarnai dan pasti bisa diwarnai dengan $n+1$ warna. Selanjutnya $P$ hanya perlu memastikan seluruh simpul berderajat $n+1$ terwarnai dengan cara menggunakan warna sama yang digunakan pada langkah pertama $P$ yakni warna 1 karena karakteristik simpul tersebut saling lepas maka bisa menggunakan warna yang sama.

**Sub Kasus II.3**: $Q$ mewarnai simpul berderajat $n$ akibatnya $P$ hanya perlu mewarnai simpul berderajat tertinggi pada graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ yakni simpul dengan derajat $m+n-1$, selanjutnya untuk mewarnai simpul berderajat $n$ sudah dapat dipastikan bisa terwarnai karena warna yang disediakan melebihi, yakni $n+1$ warna dan simpul berderajat $n+1$ yang memiliki karakteristik saling lepas juga bisa diwarnai dengan 1 warna yang tersisa pada himpunan $C$.

**Kasus III**:

Langkah pertama $P$ mewarnai simpul berderajat $n$ pada komponen graf dengan warna 1. Langkah pertama $Q$ memiliki dua kemungkinan, yakni:

**Sub Kasus III.1**: $Q$ mewarnai simpul dengan derajat $n$ sama halnya dengan yang dilakukan $P$, akibatnya simpul $P$ akan terbantu untuk menyelesaikan seluruh pewarnaan pada simpul berderajat $n$ tersebut dikarenakan simpul pada komponen graf dan berderajat $n$ ini dapat terjamin untuk bisa diwarnai seluruhnya menggunakan $n+1$ warna. Selanjutnya $P$ hanya perlu memastikan simpul berderajat terbesar terwarnai menggunakan sisa warna yang ada dan simpul berderajat $n+1$ dapat diwarnai dengan warna yang sama karena masing-masing simpul saling lepas.

**Sub Kasus III.2**: $Q$ mewarnai simpul dengan derajat $m+n-1$ dengan warna 2 akibatnya $P$ akan terbantu mewarnai seluruh simpul pada graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ dan hanya perlu memastikan simpul berderajat $n+1$ terwarnai menggunakan warna yang sama karena simpul berderajat $n+1$ saling lepas. Selanjutnya, simpul berderajat $n$ pada Graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ sudah pasti bisa diwarnai dengan $n+1$ warna yang disediakan.

**Sub Kasus III.3**: $Q$ mewarnai simpul berderajat $n+1$ dengan warna 2 jika hal ini dilakukan $Q$ maka langkah selanjutnya $P$ hanya perlu mewarnai simpul berderajat tertinggi yakni $m+n-1$ pada graf pusat dengan warna tersisa dan mewarnai simpul berderajat $n+1$ yang tersisa dengan warna 2, akibatnya simpul yang belum terwarnai pasti bisa diwarnai dengan $n+1$ warna yang disediakan.

Berdasarkan ketiga kasus diatas, dapat dijadikan dasar untuk mendapatkan bilangan kromatik permainan graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ karena apapun strategi yang dilakukan $Q$ untuk menghalangi $P$ mewarnai seluruh simpul baik mewarnai simpul berderajat $n+1$ atau simpul berderajat $n$ pada komponen graf, terlebih lagi apabila $Q$ mewarnai simpul berderajat terbesar yakni $m+n-1$ tidak akan berhasil apabila simpul dengan derajat terbesar dapat terwarnai menggunakan warna yang disediakan. Beberapa kasus diatas juga dapat dijadikan bukti bahwa dengan minimal $n+1$ warna dapat digunakan untuk mewarnai seluruh simpul pada graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ yang dinotasikan $χ\_{g}\left(S\_{m}⊙K\_{n}\right)\leq n+1$. Dengan demikian, $χ\_{g}\left(S\_{m}⊙K\_{n}\right)=n+1 ∎$.

### **4.1.3 Graf Corona** $\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)$

1. **Konstruksi dan Karakteristik Graf** $S\_{m}⊙C\_{n}$

 Graf juga $S\_{m}⊙C\_{n}$ dibentuk dari dua buah graf yakni graf *Star* $(S\_{m})$ dengan $m\geq 1$ dan graf komplit $(C\_{n})$ dengan $n\geq 2$ dimana graf $S\_{m}$ selaku graf pusat dan graf $C\_{n}$ sebagai komponen graf kemudian dioperasikan menggunakan operasi korona (terpusat). Graf $S\_{m}$ dan graf $C\_{n}$ dihubungkan menggunakan sisi (*edge*) penghubung sebanyak $n$ *copy* dan memiliki karakteristik tertentu pada masing-masing simpul pembentuk graf nya, kardinalitas sisi nya hingga bilangan kromatik yang dinotasikan dengan $χ(S\_{m}⊙C\_{n})$ dan bilangan kromatik permainannya $χ\_{g}(S\_{m}⊙C\_{n})$. Untuk lebih jelas, pembahasan konstruksi graf $S\_{m}⊙C\_{n}$ akan dibagi menjadi beberapa kasus yakni sebagai berikut:

**Kasus I:** untuk *n* genap

Tanpa mengurangi perumuman, misal diberikan graf $S\_{4}⊙C\_{6}$ yang ditunjukkan dengan gambar berikut:



Gambar 4.3 Graf $S\_{4}⊙C\_{6}$

 Dari Gambar 4.3 tersebut dapat diperoleh beberapa konstruksi yang menjadi komponen pembangun pada graf $S\_{4}⊙C\_{6}$. Graf $S\_{4}$ sebagai graf pusat dengan himpunan simpul $\{v\_{1},v\_{2},v\_{3},v\_{4}\}$ sedangkan graf $C\_{6}$ menjadi komponen graf $S\_{4}⊙C\_{6}$ sebanyak *m copy* dan dalam kasus ini sebanyak 4 buah graf $C\_{6}$ yang terhubung dengan masing-masing simpul graf $S\_{4}$ dengan himpunan simpul $\{v\_{1,1},v\_{1,2},v\_{1,3},…, v\_{4,6}\}$. Selanjutnya, dapat diketahui bahwa derajat terkecil graf $S\_{4}⊙C\_{6}$ yang dinotasikan dengan $δ\left(S\_{4}⊙C\_{6}\right)=3$ hal ini dapat dilihat pada simpul graf $C\_{6}$ dengan himpunan simpul $\{v\_{1,1},v\_{1,2},…,v\_{4,6}\}$. Sementara itu untuk derajat terbesar graf $S\_{4}⊙C\_{6}$ yang dinotasikan dengan $∆\left(S\_{4}⊙C\_{6}\right)=9$ yang diperoleh dari simpul graf pusat yakni graf $S\_{4}$ tepatnya pada simpul $v\_{1}$. Pada Gambar 4.3 juga diperoleh himpunan simpul berderajat 7 yakni $\left\{v\_{2},v\_{3},v\_{4}\right\}$ dan saling lepas. Sementara itu kardinalitas sisi penghubung yang dinotasikan $\left|S\_{4}⊙C\_{6}\right|=24$ dapat dilihat dari himpunan sisi penghubung $\{v\_{1}v\_{1,1},v\_{1}v\_{1,2},…,v\_{4}v\_{4,6}\}$.

**Kasus II:** untuk *n* ganjil

Tanpa mengurangi perumuman, misal diberikan graf $S\_{5}⊙C\_{5}$ yang akan ditunjukkan pada Gambar 4.4 berikut:



Gambar 4.4 Graf $S\_{5}⊙C\_{5}$

 Gambar 4.4 diatas terbentuk dari dua buah graf $S\_{5}$ dengan himpunan simpul $\{v\_{1},v\_{2},…,v\_{5}\}$ sebagai graf pusat dan graf $C\_{5}$ dengan himpunan simpul $\left\{v\_{1,1},v\_{1,2},…,v\_{5,5}\right\}$ sebagai komponen graf. Simpul graf pusat $S\_{5}$ saling terhubung dengan simpul-simpul graf $C\_{5}$. Himpunan simpul $\left\{v\_{1,1},v\_{1,2},…,v\_{5,5}\right\}$ menjadi simpul dengan derajat terkecil dengan memiliki derajat 3 atau dinotasikan dengan $δ\left(S\_{5}⊙C\_{5}\right)=3$. Sementara itu, simpul $v\_{1}$ menjadi simpul dengan derajat tertinggi yakni berderajat 9 atau dapat dinotasikan dengan $∆\left(S\_{5}⊙C\_{5}\right)=9$. Himpunan simpul $\left\{v\_{1},v\_{2},…,v\_{5}\right\}$ berderajat 6 dan saling lepas Sementara itu kardinalitas sisi penghubung yang dinotasikan $\left|S\_{5}⊙C\_{5}\right|=25$ dapat dilihat dari himpunan sisi penghubung $\{v\_{1}v\_{1,1},v\_{1}v\_{1,2},…,v\_{5}v\_{5,5}\}$.

 Dari dua kasus diatas, akan dibuat sebuah perumuman dari graf korona $S\_{m}⊙C\_{n}$, perhatikan gambar berikut:



Gambar 4.5 Graf $S\_{m}⊙C\_{n}$

 Dengan memperhatikan Gambar 4.5, dapat diketahi bahwa graf $S\_{m}⊙C\_{n}$ dibentuk oleh dua buah graf penyusun yakni graf *Star* ($S\_{m}$) dengan $\{v\_{1},v\_{2},v\_{3},…v\_{m}\}$ sebagai himpunan simpul pada graf $S\_{m}$, graf $S\_{m}$ ini juga berperan sebagai graf pusat. Graf kedua yang menjadi komponen pembentuk graf $S\_{m}⊙C\_{n}$ ini adalah graf *Cycle* yang dinotasikan dengan $C\_{n}$ dengan $\{v\_{1,1},v\_{1,2},v\_{1,3},…v\_{m,n}\}$ sebagai himpunan simpul yang ada pada graf yang $C\_{n}$ graf ini juga berperan sebagai komponen graf yang terhubung pada masing-masing simpul yang ada pada graf $S\_{m}$. Informasi lain yang dapat diperoleh dari gambar diatas yakni derajat terkecil atau dapat dinotasikan $δ\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)=3$, dapat dilihat dari simpul yang ada pada komponen graf yakni graf *Cyle* $(C\_{m})$ tanpa mengurangi perumuman yakni pada simpul $v\_{1,1}$. Sedangkan derajat tertinggi dari graf diatas yang dinotasikan dengan $∆\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)$ adalah $m+n-1$. Hal ini diperoleh dengan memperhatikan simpul pusat pada graf star $(S\_{m})$ tepatnya pada $v\_{1}$. Sementara itu dapat dilihat pula himpunan simpul dengan derajat $n+1$ tepatnya himpunan $\{v\_{2},v\_{3}, v\_{4},…,v\_{m}\}$ yang saling lepas.

1. **Bilangan Kromatik Graf** $S\_{m}⊙C\_{n}$

**Teorema 4.3** (Yusuf et al., 2022)

$χ(S\_{m}⊙C\_{n})\left\{\begin{matrix}3, jika m\geq 1 dan n\geq 3, n genap\\\\4, jika m\geq 1 dan n\geq 3, n ganjil\end{matrix}\right.$

Bukti:

Teroema diatas akan dibuktikan dengan menggunakan dua kasus kecil graf hasil operasi corona:

Diketahui $χ\left(C\_{n}\right)=3$, jika $n$ genap dan $χ\left(C\_{n}\right)=4$, jika $n$ ganjil. Dengan demikian, sebanyak $m$ copy graf $C\_{n}$ dapat diwarnai dengan minimal 3 warna dan maksimal 4 warna disesuaikan dengan $n$ yang ada pada $S\_{m}⊙C\_{n}$. Misal $C=\{1,2,3,4\}$ adalah warna maksimal yang bisa digunakan untuk mewarnai $C\_{n}$. Kemudian diketahui jika $χ\left(S\_{m}\right)=2$, dimana salah satu warna digunakan untuk mewarnai verteks pusat $S\_{m}$ dan satu warna lagi digunakan untuk mewarnai verkteks daun $S\_{m}$ sebanyak $m$ copy. Dikarenakan graf $C\_{n}$ terhubung dengan verteks daun graf $S\_{m}$ dengan demikian salah satu verteks $S\_{m}$ selalu bisa diwarnai menggunakan $C$. Lalu untuk mewarnai salah satu verteks $S\_{m}$ yang lain memerlukan satu warna tambahan dengan warna yang berbeda dari $C$.

**Kasus 1:**

Misal graf $S\_{5}⊙C\_{5}$ dan diketahui $C=\{1,2,3\}$ merupakan himpunan warna yang tersedia untuk mewarnai graf $C\_{5}$, kemudian untuk mewarnai salah satu verteks $S\_{5}$ baik verteks pusat atau verteks daunnya bisa menggunakan salah satu warna $C$. Karena diketahui $χ\left(S\_{m}\right)=2$ maka untuk mewarnai satu verteks tersisa pada $S\_{m}$ memerlukan satu warna tambahan diluar warna $C$, sehingga $χ\left(S\_{5}⊙C\_{5}\right)=4$ warna.

**Kasus 2:**

Misal graf $S\_{3}⊙C\_{4}$ dan diketahui $C=\{biru, ungu\}$ merupakan himpunan warna yang tersedia untuk mewarnai graf $C\_{4}$, kemudian untuk mewarnai salah satu verteks $S\_{3}$ baik verteks pusat atau verteks daunnya bisa menggunakan salah satu warna $C$. Karena diketahui $χ\left(S\_{m}\right)=2$ maka untuk mewarnai satu verteks tersisa pada $S\_{m}$ memerlukan satu warna tambahan diluar warna $C$, sehingga $χ\left(S\_{5}⊙C\_{3}\right)=3$ warna.

 Dari dua contoh kasus diatas, dapat disimpulkan bahwa penentuan $χ\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)$ dapat memperhatikan terlebih dahulu nilai ganjil atau genap $n$ pada $C\_{n}$, jika $n$ bernilai genap maka $χ\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)=3$ dan jika $n$ bernilai ganjil maka $χ\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)=4. ∎$

 Dari pemaparan kasus-kasus dan Teorema 4.3, dapat ditarik kesimpulan bahwasannya $χ(S\_{m}⊙C\_{n})$ sudah bisa ditentukan dengan menggunakan tiga warna, namun tidak dapat dijadikan dasar sebagai bilangan kromatik graf $S\_{m}⊙C\_{n}$ hal ini dikarenakan 3 warna tidak bisa digunakan jika graf $S\_{m}⊙C\_{n}$ memiliki $n$ bernilai ganjil dimana $n\geq 1$. Dengan demikian, diperlukan setidaknya satu warna tambahan untuk dapat mewarnai seluruh simpul pada graf $S\_{m}⊙C\_{n}$ baik $n$ genap maupun ganjil. Jadi dapat dibuktikan bahwa $χ\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)=4$.

1. **Bilangan Kromatik Permainan graf** $S\_{m}⊙C\_{n}$

**Teorema 4.4**

$χ\_{g}\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)=4, untuk m\geq 1 dan n\geq 3$

**Bukti**:

Berdasarkan Teorema (Bartnicki et al., 2008) dalam (Mujib, 2019) yang mengatakan jika $S\_{m}⊙C\_{n}$ adalah graf dengan derajat terbesar $∆\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)=m+n-1$, dimana $m\geq 1 dan n\geq 3$ maka $χ\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)\leq χ\_{g}\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)\leq ∆\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)+1$ sedemikian hingga $4\leq χ\_{g}\left(S\_{m}⊙K\_{n}\right)\leq m+n$.

 Diketahui $χ\left(S\_{m}\right)=2$ dan $χ\left(C\_{n}\right)=3$, jika $n$ genap dan $4$ jika $n$ ganjil, $∆\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)=m+n-1$ dan $δ\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)=3$, misal diberikan $4$ warna yakni himpunan $C=\{1,2,3,4\}$, maka penentuan bilangan kromatik permainan graf $S\_{m}⊙C\_{n}$ dengan memerhatikan Gambar 4.5 akan ditunjukkan melalui beberapa kasus sebagai berikut:

**Kasus I:**

Langkah pertama $P$ mewarnai simpul berderajat terbesar yakni $m+n-1$ yaitu simpul $v\_{1}$ menggunakan salah satu warna pada $C$ misalnya warna 1, kemudian langkah pertama $Q$ memiliki 2 kemungkinan yakni:

**Sub Kasus I.1**: $Q$ mewarnai simpul berderajat $n+1$ dengan warna 2 akibatnya langkah kedua $P$ bisa mewarnai simpul berderajat yang sama menggunakan warna yang sama pula seperti yang dilakukan $Q$ karena karakteristik simpul berderajat $n+1$ adalah saling lepas dan tidak saling bertetangga. Kemungkian berikutnya $P$ hanya perlu memastikan bahwa simpul pada komponen graf dengan derajat $3$ dapat terwarnai dengan 4 warna yang disediakan.

**Sub Kasus I**.**2**: $Q$ mewarnai simpul berderajat $3$ dengan warna 2, akibatnya $P$ bisa mewarnai simpul tersisa dengan $4$ warna yang disediakan dan menyisakan $2$ warna yang tersisa. Dalam hal ini simpul yang belum terwarnai adalah simpul berderajat $n+1$ dengan karakteristik masing-masing simpul saling lepas, maka dengan $2$ warna yang tersisa sudah pasti simpul berderajat $n+1$ dapat terwarnai karena pada dasarnya hanya memerlukan $1$ warna saja untuk mewarnainya. Dengan demikian, pada **Kasus I** ini dapat dikatakan $P$ memenangkan permainan karena $Q$ tidak mampu menghalangi $P$ untuk tidak dapat mewarnai salah satu simpul pada graf $S\_{m}⊙C\_{n}$.

**Kasus II**: Langkah pertama $P$ mewarnai simpul berderajat $n+1$ dengan warna 1, maka lagkah pertama $Q$ memiliki 2 kemungkinan sebagai berikut:

**Sub Kasus II**.**1**: $Q$ melakukan hal yang sama seperti yang dilakukan $P$ dengan mewarnai simpul berderajat $n+1$, akibatnya $P$ akan terbantu untuk mewarnai seluruh simpul berderajat $n+1$ tersebut, kemudian $P$ hanya perlu memastikan simpul berderajat tertinggi yakni simpul $v\_{1}$ terwarnai karena simpul berderajat $3$ pada komponen graf yakni graf $C\_{n}$ dapat dipastikan terwarnai dengan $4$ warna yang disediakan

**Sub Kasus II**.**2**: $Q$ mewarnai simpul berderajat $m+n-1$ atau derajat tertinggi, jika hal ini dilakukan $Q$ maka akan membantu $P$ mewarnai seluruh simpul karena $P$ hanya perlu memastikan simpul berderajat $n+1$ bisa terwarnai dengan $1$ warna dan simpul berderajat $3$ pada komponen graf dapat terwarnai dengan $4$ warna yang disediakan.

**Sub Kasus II**.**3**: $Q$ mewarnai simpul berderajat 3, akibatnya langkah selanjutnya $P$ hanya perlu mewarnai simpul berderajat tertinggi dengan warna yang tersisa misalnya warna 3, selanjutnya strategi apapun yang dilakukan $Q$ tidak akan berhasil karena simpul berderajat $3$ sudah pasti dapat diwarnai dengan 4 warna dan simpul berderajat $n+1$ hanya memerlukan satu warna tersisa untuk mewarnainya.

**Kasus III**:

Langkah pertama $P$ mewarnai simpul berderajat $3$ terlebih dahulu tepatnya pada komponen graf menggunakan warna 1, $Q$ selaku pemain kedua melakukan gilirannya dengan beberapa kemungkinan sebagai berikut:

**Sub Kasus III**.**1**: $Q$ melakukan hal yang sama seperti yang dilakukan $P$ dengan mewarnai simpul berderajat 3 yang terletak pada komponen graf, akibatnya $P$ dikatakan terbantu untuk menyelesaikan seluruh pewarnaan simpul pada komponen graf tersebut karena simpul berderajat 3 tersebut sudah terjamin dapat diwarnai menggunakan 4 warna yang disediakan. Selanjutnya $P$ hanya perlu memastikan simpul dengan derajat tertinggi dapat terwarnai dengan warna yang tersisa.

**Sub Kasus III**.**2**: $Q$ melakukan langkah pertama dengan mewarnai simpul berderajat tertinggi yakni $m+n-1$ akibatnya akan sama seperti **Sub Kasus II.2** yang mana malah akan membantu $P$ mewarnai seluruh simpul pada graf $S\_{m}⊙C\_{n}$. Dan simpul berderajat 3 pada komponen graf sudah pasti dapat terwarnai dengan warna yang ada pada $C$.

**Sub Kasus III**.**3**: $Q$ melakukan langkah pertama dengan mewarnai simpul berderajat $n+1$ dengan warna 2, langkah selanjutnya $P$ hanya perlu mewarnai simpul dengan derajat tertinggi atau $m+n-1$ dengan warna 3. Selanjutnya, $P$ hanya perlu mewarnai simpul berderajat $n+1$ dengan warna yang sama yang digunakan $Q$ pada langkah pertama yakni warna $2$ karena simpul dengan derajat tersebut tidak saling bertetangga. Kemudian $P$ juga bisa memastikan bahwa simpul berderajat 3 bisa terwarnai dengan 4 warna yang disediakan pada $C$.

Berdasarkan ketiga kasus diatas, dapat ditarik kesimpulan bahwa jika strategi yang harus digunakan $P$ untuk memenangkan permainan adalah dengan mewarnai terlebih dahulu simpul dengan derajat tertinggi yakni $m+n-1$. Sedemikian hingga dengan $4$ warna yang disediakan sudah dapat mewarnai seluruh simpul pada graf $S\_{m}⊙C\_{n}$, dengan kata lain $χ\_{g}\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)\leq 4$ dan $4\leq χ\_{g}\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)\leq m+n$. Oleh karena itu terbukti bahwa $χ\_{g}\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)=4$.

## **4.2 Pembahasan**

 Operasi graf korona menurut (Firmansyah & Mujib, 2020) merupakan sebuah operasi yang menghasilkan bentuk graf baru dari dua buah graf dalam penelitian ini, operasi korona digunakan untuk menghasilkan bentuk graf baru dari graf Star $(S\_{m})$, graf Komplit $(K\_{n})$, dan graf *Cycle* $(C\_{n})$. Dengan demikian, operasi korona dinotasikan $S\_{m}⊙K\_{n}$ didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan cara mengambil $m$ *copy* graf $K\_{1},K\_{2},K\_{3},…K\_{n}$ dari graf $K\_{n}$ kemudian memberi penghubung simpul ke-*i* dari $S\_{m}$ dengan simpul-simpul pada $K\_{i}$. Sedangkan operasi korona yang dinotasikan $S\_{m}⊙C\_{n}$ diberi definisi yakni graf yang dibentuk dengan cara mengambil $m$ *copy* graf $C\_{1},C\_{2},C\_{3},…C\_{n}$ dari graf $C\_{n}$ kemudian memberi penghubung simpul ke-*i* dari $S\_{m}$ dengan simpul-simpul pada $C\_{i}$. Sehingga, kedua kelas graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ dan $S\_{m}⊙C\_{n}$ dibentuk oleh dua buah graf yang mana sama-sama menjadikan graf *Star* $(S\_{m})$ sebagai graf pusat. Kesamaan yang dimiliki oleh kedua kelas graf yakni $S\_{m}⊙K\_{n}$ dan $S\_{m}⊙C\_{n}$ adalah pada derajat simpul penyusun graf, dimana kedua kelas graf sama-sama memiliki 2 jenis simpul penyusun yang memiliki derajat yang sama yakni simpul berderajat tertinggi dengan derajat $m+n-1$ tepatnya pada simpul $v\_{1}$ yang diperoleh di Gambar 4.2 dan Gambar 4.5 dan simpul berderajat $n+1$ yakni himpunan simpul $v\_{2},v\_{3},…v\_{m}$ diperoleh juga pada Gambar 4.2 dan pada Gambar 4.5. Sedangkan untuk perbedaan dari kedua kelas graf tersebut adalah pada graf komponen nya dimana graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ memiliki komponen graf berupa graf Komplit $(K\_{n})$ dan kelas graf $S\_{m}⊙C\_{n}$ memiliki komponen graf berupa graf berupa graf *Cycle* $(C\_{n})$ hal ini juga mengakibatkan ada perbedaan pada himpunan simpul nya.

 Penentuan bilangan kromatik dari kedua kelas graf juga diperoleh menggunakan pola yang sama yakni memastikan terlebih dahulu bilangan kromatik graf penyusunnya baik graf pusat dan komponen grafnya, kemudian membuktikan apakah bisa dijadikan sebagai bilangan kromatik dari kelas graf atau diperlukan warna tambahan untuk bisa mewarnai seluruh simpul pada kelas graf dan jika memang diperlukan, penambahan warna diberikan sebanyak satu warna kemudian dilakukan pembuktian dan akan seperti itu seterusnya sampai bilangan kromatik kelas graf ditemukan. Penentuan bilangan kromatik pada dua kelas graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ dan $S\_{m}⊙C\_{n}$ adalah sebagai berikut:

1. Menentukan dan membuktikan bilangan kromatik pada graf pusat yakni graf $S\_{m}$ dan bilangan kromatik pada komponen graf yakni $K\_{n}$ serta $C\_{n}$.
2. Memperoleh bilangan kromatik graf pusat $χ(S\_{m)}=2$ dengan $m\geq 1$, bilangan kromatik komponen graf yakni graf $K\_{n}=n$ dengan $n\geq 1$, serta bilangan kromatik graf $χ(C\_{n})=3$ jika $m\geq 1$ jika $n$ genap dan $χ\left(C\_{n}\right)=4$ jika $n$ ganjil.
3. Menjadikan bilangan kromatik yang lebih besar antara bilangan kromatik graf pusat dan komponen graf sebagai dasar untuk persediaan jumlah warna yang digunakan untuk mewarnai seluruh simpul pada kelas graf. Pada kelas graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ warna yang disediakan sebanyak $n$ atau dinotasikan $C=\{1,2,3,…n\}$ warna sedangkan kelas graf $S\_{m}⊙C\_{n}$ warna yang disediakan sebanyak 4 warna dan dinotasikan $C=\{1,2,3,4\}$.
4. Membuktikan pada kelas graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ bahwa $n$ warna bisa digunakan untuk mewarnai seluruh simpul yang ada pada graf. Kemudian membuktikan pada kelas graf $S\_{m}⊙C\_{n}$ bahwa 4 warna dapat digunakan untuk mewarnai seluruh simpul pada graf.
5. Jika pembuktian bilangan kromatik tidak dapat dilakukan, artinya diperlukan warna tambahan setidaknya satu warna tambahan kemudian dilakukan pembuktian ulang sampai memperoleh hasil bahwa bilangan kromatik yang dibuktikan dan warna yang disediakan dapat digunakan untuk mewarnai seluruh simpul yang ada pada kelas graf.

 Bilangan kromatik permainan dari kedua kelas graf juga memiliki pola yang sama dalam pembuktiannya, yakni berdasarkan Teorema (Bartnicki et al., 2008) dalam (Mujib, 2019) dimana ia mengatakan bilangan kromatik permainan suatu graf bernilai minimal sama dengan nilai bilangan kromatiknya dan maksimal bernilai sebesar derajat tertinggi graf tersebut ditambah 1 atau dapat dinotasikan dengan $χ\left(S\_{m}⊙K\_{n}\right)\leq χ\_{g}\left(S\_{m}⊙K\_{n}\right)\leq ∆\left(S\_{m}⊙K\_{n}\right)+1$ dan $\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)\leq χ\_{g}\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)\leq ∆\left(S\_{m}⊙C\_{n}\right)+1$. Dengan kata lain pembuktian bilangan kromatik permainan kelas graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ dan $S\_{m}⊙C\_{n}$ dimulai dengan menggunakan bilangan kromatik kelas graf masing-masing atau nilai bilangan kromatik permainan yang digunakan untuk dibuktikan sesuai dengan nilai bilangan kromatik kelas graf tersebut, jika pembuktian sudah dapat dilakukan maka bilangan kromatik permainan kelas graf telah ditemukan. Namun jika bilangan kromatik permainan tidak dapat dibuktikan maka diperlukan nilai tambahan dan kemudian dilakukan pembuktian kembali sampai benar-benar dapat dibuktikan bahwa nilai tersebut dapat dijadikan sebagai bilangan kromatik permainan kelas graf tersebut. Konjektur penentuan bilangan kromatik permainan kelas graf $S\_{m}⊙K\_{n}$ dan $S\_{m}⊙C\_{n}$ sama dengan konjektur bilangan kromatiknya, namun ada penambahan yakni membuktikan bilangan kromatik permainan berdasarkan bilangan kromatik yang diperoleh.

 Penerapan teori graf sangat banyak dapat ditemukan di kehidupan sehari-hari, seperti pada lampu lalu lintas, teknologi penentuan lokasi yang ada pada *Google Maps* dan jaringan bilangan listrik, jaringan komunikasi, serta jaringan transportasi (Slamin, 2019). Penentuan bilangan kromatik juga merupakan salah satu implementasi dari perkembangan teori graf, dimana seseorang dapat dengan mudah mengetahui banyak warna yang digunakan untuk mewarnai suatu titik untuk mendemonstrasikan sebuah perlombaan, suatu tempat ataupun lokasi tertentu walaupun jumlah nya puluhan, ratusan, bahkan ribuan sebagai contoh yang diungkapkan (Masido, 2007) dimana ia memisalkan suatu perlombaan yang diikuti oleh 5000 perseta yang bertujuan memperoleh satu pemenang dengan sistem yang digunakan adalah sistem gugur, dalam hal ini teori graf dapat digunakan untuk memudahkan bagaimana menghitung jumlah pertandingan dari perlombaan tersebut.

 Bilangan kromatik sampai saat ini terus berkembang sampai merambah ranah permainan atau lebih dikenal dengan bilangan kromatik permainan pada graf. Dengan berkembangnya teknologi yang ada pada saat ini akan lebih baik jika dikembangkan dan dikolaborasikan dengan teknik komputasional yang sedang tren saat ini, bukan tidak mungkin hal tersebut akan memberikan dampak positif pada perkembangan teknologi saat ini. Salah satunya misalnya dapat dibuat aplikasi berbasis android yang hampir menyerupai *Google Maps* namun aplikasi ini membuat pengguna nya bisa melalui rute pulang yang berbeda dengan rute perginya tanpa harus melewati jalan yang sama sesuai dengan pendapat Euler pada tahun 1736 dalam (Slamin, 2019).

 Kedua kelas graf yang dikaji, memiliki strategi yang sama dalam penentuan bilangan kromatik permainannya yakni dengan mewarnai terlebih dahulu simpul dengan derajat tertinggi pada graf korona. Jika dilakukan pengkajian lebih dalam, akan memiliki kemungkinan diperoleh dan dibuktikan teorema umum dari kelas graf *Star* yang dioperasikan korona dengan graf-graf lainnya dengan harapan dapat dimanfaatkan oleh peneliti-peneliti lainnya.