# **BAB IPENDAHULUAN**

## **1.1 LATAR BELAKANG**

Seiring dengan berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi, matematika merupakan salah satu ilmu yang dapat digunakan dalam menyelesaikan berbagai kompleksnya permasalahan. Berbagai masalah dalam kehidupan sehari-hari biasanya diidentifikasi terlebih dahulu, kemudian dinyatakan dalam suatu sistem yang bersifat matematis. Salah satu bentuk model matematika yang dapat digunakan untuk merepresentasikan berbagai masalah dalam kehidupan sehari-hari dapat dinyatakan dalam bentuk diagram titik dan garis yang dikenal dengan istilah graf.

Dalam (Nugraheni, 2017) Graf merupakan salah satu teori dalam ilmu matematika yang memiliki peranan penting dan terus dikaji perkembangannya. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan terkenal asal Swiss yang bernama Leonhard Euler pada tahun 1736 dalam memecahkan masalah jembatan Königsberg yang sangat terkenal di Eropa. Jembatan Königsberg merupakan jembatan yang terletak di Kota Königsberg dan sekarang bernama Kota Kaliningrat sebelah timur Prussia Jerman, dikota tersebut terdapat sungai Pregal yang mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai. Ada tujuh buah jembatan yang menghubungkan daratan yang dibelah oleh sungai tersebut. (Bondy, 2008)

Masalah Jembatan Königsberg adalah apakah mungkin untuk melewati empat daerah yang terhubung dengantujuh buah jembatan diatas sungai itu, masing-masing dapat dilewati tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula. Sebagian penduduk kota sepakat bahwa memang tidak mungkin melalui setiap jembatan itu hanya sekali dan kembali ke tempat semula, tetapi mereka tidak dapat menjelaskan mengapa demikian jawabannya kecuali dengan cara coba-coba.

Seorang matematikawan Swiss, L. Euler adalah orang pertama yang berhasil menemukan jawaban masalah jembatan Königsberg ini dengan menggunakan pembuktian yang sederhana. Ia memodelkan masalah ini ke dalam bentuk graf. Daratan yang dihubungkan oleh jembatan dinyatakan sebagai titik dan jembatan disimbolkan sebagai garis.Jawaban yang dikemukakan oleh Euler adalah orang tidak mungkin bisa melalui ketujuh jembatan itu masing-masing sebanyak satu kali dan kembali ke tempat semula jika derajat setiap titik tidak seluruhnya genap. Yang dimaksud derajat adalah banyaknya garis yang bersisian dengan titik. Dengan adanya penemuan Euler tentang pemecahan permasalahan jembatan Königsberg, memunculkan teori-teori tentang graf yang sampai saat ini masih terus dikaji perkembangannya. (Bondy, 2008)

Pada dasarnya banyak sekali masalah nyata yang dapat diwakili dengan diagram titik dan garis, diantaranya penyampaian suatu berita agar tersebar luas, pengantaran surat, penyusunan trayek pedagang keliling, perancangan jaringan kereta api, telekomunikasi, komputer, penyaluran bahan bakar, perancangan arena pameran atau tempat rekreasi agar pengunjung dapat melihat semua stand atau atraksi hiburan tanpa melewati ulang jalur yang sama dan masih banyak lagi permasalahan yang lainnya. Pada contoh diatas seperti rumah, kota, stasiun, sentral telepon, pusat informasi, komputer, POM bensin dan stand hiburan dapat digambarkan sebagai titik dan hubungan jalan, prasarana hubungan, jalur komunikasi, kabel dapat diwakili oleh garis. Diagram titik dan garis seperti diatas dalam model matematika dikenal sebagai graf.

Secara umum, graf adalah suatu diagram yang memuat informasi tertentu jika diinterpretasikan secara tepat. Dalam kehidupan sehari-hari, graf digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada. Tujuannya adalah sebagai visualisasi objek-objek agar lebih mudah dimengerti. (Siang, 2006). Sebagai contoh dalam penyusunan jadwal mata kuliah. Misalkan ada 10 orang mahasiswa yang mengambil 6 mata kuliah dengan kombinasi berbeda seperti pada tabel dibawah ini.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Mahasiswa** | **LP** | **SP** | **MP** | **Geometri** | **AR** | **TB** |
| 1 | **√** | **√** |  |  |  | **√** |
| 2 | **√** |  |  |  | **√** | **√** |
| 3 | **√** |  | **√** |  | **√** |  |
| 4 |  |  |  | **√** | **√** |  |
| 5 |  | **√** |  | **√** |  |  |
| 6 | **√** |  | **√** |  |  |  |
| 7 |  |  |  |  | **√** | **√** |
| 8 | **√** | **√** |  |  |  |  |
| 9 |  |  | **√** |  | **√** |  |
| 10 | **√** |  |  |  |  | **√** |

Keterangan : **LP** = Landasan Pendidikan
 **SP** = Statistika Pendidikan
 **MP** = Metode Penelitian
 **AR** = Analisis Real
 **TB** = Teori Bilangan

|  |  |
| --- | --- |
| **Sesi Kuliah/Ujian** | **Mata Kuliah** |
| Merah | LP, Geometri |
| Hijau | SP, AR |
| Kuning | MP, TB |



Adapun permasalahan pada contoh diatas adalah bagaimana cara membuat jadwal, baik jadwal mata kuliah maupun jadwal ujian sedemikian sehingga tidak ada jadwal yang saling tumpang tindih. Variasi mata kuliah yang sudah direpresentasikan dalam tabel akan dimodelkan dalam bentuk graf. Mata kuliah dinotasikan dengan simpul yang merupakan subjek dari batasan masalah yang akan dipenuhi. Permasalahan yang menarik adalah agar jadwal perkuliahan ataupun jadwal ujian tidak saling tumpang tindih satu sama lain.

Dalam (Mujib, 2011), Bondy & Murty, (2008) menyatakan secara konseptual graf merupakan representasi dari suatu permasalahan dengan menggunakan objek-objek berupa lingkaran, dimana setiap lingkaran tersebut dapat terhubung satu sama lain dengan menggunakan sekumpulan garis. Graf merupakan pasangan terurut himpunan $(V,E)$ yang dinotasikan dengan *G* = (*V*, *E*) yang dalam hal ini *V* adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul *(vertex)* dan *E* adalah himpunan sisi *(edges)* yang menghubungkan sepasang simpul.



Gambar diatas merupakan gambar graf $G$ yang memiliki himpunan titik dan himpunan sisi. Adapun himpunan titik $V\left(G\right)=\left\{v\_{1}, v\_{2}, v\_{3}, v\_{4}, v\_{5}\right\}$ dan himpunan sisi $E\left(G\right)=\left\{e\_{1},e\_{2},e\_{3},e\_{4},e\_{5},e\_{6},e\_{7},e\_{8}\right\}$ dengan jumlah titik sebanyak 5 buah titik dan jumlah sisi sebanyak 8 buah sisi. Titik $v\_{1}$ dan$ v\_{2}$ pada graf $G$ dikatakan berdampingan atau bertetangga *(adjacent)* jika terdapat sebuah sisi yang menghubungkan antara $v\_{1}$ dan$ v\_{2}$, yaitu $e=v\_{1}v\_{2}$. Dengan demikian, $v\_{1}$ dan$ v\_{2}$ dikatakan bersisian *(incident)* dengan sisi $e$. Gambar diatas juga menujukkan jika titik $v\_{2}$ bertetangga dengan titik $v\_{1}, v\_{3}$ dan $v\_{5}$tetapi tidak bertetangga dengan $v\_{4}$. Titik $v\_{4}$ bersisian dengan $v\_{1}v\_{4}, v\_{4}v\_{5}$dan $v\_{3}v\_{4}$.

Adapun topik menarik yang terus dikaji perkembangannya didalam sebuah graf yaitu mengenai pewarnaan graf *(graph coloring).* Pewarnaan graf digolongkan menjadi tiga macam, yaitu pewarnaan titik *(vertex coloring)*, pewarnaan sisi *(edge coloring)*, dan pewarnaan wilayah *(region coloring)*. Pewarnaan graf merupakan konsep yang sangat penting digunakan sebagai bentuk pelabelan graf dengan cara memberikan warna pada elemen graf yang akan dijadikan subjek dalam memahami suatu permasalahan. Dalam hal ini, pewarnaan graf yang akan dikaji lebih dalam ialah mengenai pewarnaan titik pada sebuah graf. (Mahardika & Marcos, 2017)

Pewarnaan titik pada graf $G$ merupakan pemberian warna pada setiap titik-titik di graf $G$, dimana dengan mewarnai setiap titik sehingga titik-titik yang bertetangga diwarnai dengan warna yang berbeda (Chartrand & Zhang, 2002). Adapun warna yang dapat digunakan berupa elemen dari sembarang himpunan ataupun bilangan positif $\left\{1,2,3,…, k\right\}.$ Dalam pewarnaan titik pada suatu graf $G$ menujukkan banyaknya warna minimum yang digunakan untuk mewarnai setiap titik pada graf $G$, sedemikian sehingga setiap dua titik yang berhubungan langsung mendapatkan warna yang berbeda. Banyaknya warna minimun yang digunakan untuk pewarnaan titik pada graf $G$ disebut dengan bilangan kromatik yang dinotasikan dengan $χ\left(G\right).$(Puspasari & Dafik, 2014)

Penelitian yang berkaitan dengan bilangan kromatik terdapat dalam penelitian (Firmansyah et al., 2020) dengan judul “Bilangan Kromatik Graf Hasil Operasi Korona” dengan mencari perumuman bilangan kromatik berdasarkan operasi korona pada kelas graf $C\_{n}⊙C\_{m}, K\_{n}⊙K\_{m},$ dan $K\_{n}⊙C\_{m}$. Penelitian lain yang berkenaan dengan bilangan kromatik antara lain dengan judul “Bilangan Kromatik Hasil Operasi Korona Graf Lingkaran dan Graf Kubik” dalam penelitiannya yaitu menentukan pola bilangan kromatik dari graf hasil operasi korona pada kelas graf lingkaran dan graf kubik. (Simanjuntak & Mulyono, 2021)

Kemudian dilanjutkan penelitian lain dengan judul “Bilangan Kromatik Permainan pada Beberapa Graf Hasil Kali Tensor” dimana pada permainan ini terdiri dari dua orang pemain. Adapun kelas graf hasil kali tensor yang dikaji yaitu graf $C\_{3}⊗K\_{1},\_{n}, $graf $P\_{m}⊗K\_{1},\_{n,}$graf $P\_{m}⊗C\_{n}$ dan graf $P\_{m}⊗P\_{n}$(Mujib, 2011)

Operasi graf merupakan gabungan dari dua buah graf yang dioperasikan menggunakan jenis operasi tertentu yang akan menghasilkan graf yang berbeda dari graf asalnya. Pada penelitian ini operasi graf yang digunakan adalah operasi korona yang dinotasikan dengan $G⊙H$. Operasi korona dapat dilakukan dengan mengambil duplikat dari graf pertama dan graf kedua, kemudian titik yang ada pada graf pertama dihubungkan kesetiap titik yang ada pada graf kedua dan graf kedua dioperasikan sebanyak titik yang ada pada graf pertama. Setelah operasi graf korona dilakukan, maka langkah selanjutnya adalah menentukan bilangan kromatik $χ(G)$ pada graf yang dihasilkan sebagai langkah awal untuk mendapatkan bilangan kromatik permainan $χ\_{g}(G)$ yang disimulasikan kedalam sebuah permainan *(game).*

Permainanbilangankromatikiniberisikandua orang pemain, yang manapemain $A$ menjadi pemain pertama dan pemain $B$ menjadi pemain kedua dimana kedua pemain masing-masing memilih warna darihimpunanwarna {1, 2, 3, 4, …, $k$}. Dalam permainan ini, setiap pemain memiliki tujuan masing-masing yang hendak dicapai. Pemain $A$ bertujuan untuk mewarnai semua tiitk yang ada pada graf $G$ dengan warna yang tersedia yang artinya jika semua titik dapat ia warnai maka dapat disimpulkan bahwa ialahpemenangnyadandengan kata lain iaharusmenentukanstrategiuntukmelakukan semua pewarnaan titik. Sedangkanpemain $B$ bertujuan untuk menghalangi tujuan pemain$A$ tercapai yang artinya ia harus menentukan strategi bagaimana caranya agar pemain $A$ tidak dapat mewarnai seluruh titik yang ada pada graf $G$. Dengan melakukan pewarnaan secara bergiliran, keduapemainmewarnaiseluruh titik yang adapadagraf$G$, dimana pemain $A$ sebagai pemain pertama memulai lebih dahulu dan $B$ sebagai pemain setelahnya. Bilangan kromatikpermainanitusendirimemilikimaknabilangan$k$ terkecil sedemikian sehingga $A$ mempunyai strategi untuk menang pada graf $G$ dengan $k$ warna yang dinotasikan $χ\_{g}(G)$.

Berdasarkan dari uraian diatas serta hasil kajian literatur yang dilakukan oleh peneliti terhadap riset-riset sebelumnya, sejauh ini belum ada ditemui riset penelitian mengenai bilangan kromatik permainan pada operasi graf korona, sehingga peneliti tertarik untuk mengkajinya. Pada penelitian ini, graf yang dikaji dibatasi pada beberapa kelas tertentu. Adapun kelas graf yang akan dicari bilangan kromatik permainannya adalah graf $C\_{m}⊙C\_{n}$ dan graf $C\_{m}⊙K\_{n. }$

## **1.2 IDENTIFIKASI MASALAH**

 Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, didapatkan beberapa hal yang menjadi permasalahan sebagai berikut:

1. Masih banyak yang belum mengetahui tentang pemanfaatan pemodelan matematika dalam menyelesaikan permasalahan.
2. Penyelesaiaan permasalah masih dilakukan dalam bentuk biasa, tidak diselesaikan menggunakan pemodelan matematis seperti menginterpretasikan visualisasi objek-objek agar lebih mudah dimengerti dan lebih efisien.
3. Belum ada kajian mengenai bilangan kromatik permainan pada kelas graf operasi korona.

**1.3 BATASAN MASALAH**

 Adapun batasan masalah dalam tugas akhir ini hanya dibatasi pada dua kelas graf yaitu graf $C\_{m}⊙C\_{n}$ dan graf $C\_{m}⊙K\_{n. }$Dalam penelitian ini, langkah pertama yang dilakukan adalah menentukan dan membuktikan bilangan kromatik nya terlebih dahulu sebagai langkah awal pembuktian, setelah itu peneliti melanjutkan untuk mencari bilangan kromatik permainan pada dua kelas graf yang dikaji yaitu graf $C\_{m}⊙C\_{n}$ dan graf $C\_{m}⊙K\_{n. }$

## **1.4 RUMUSAN MASALAH**

Adapun permasalah yang akan diselesaikan dalam tugas akhir ini adalah:

1. Bagaimana menentukan dan membuktikan bilangan kromatik pada graf $C\_{m}⊙C\_{n}dan graf C\_{m}⊙K\_{n}$ ?
2. Bagaimana menentukan dan membuktikan bilangan kromatik permainan pada graf $C\_{m}⊙C\_{n}dan graf C\_{m}⊙K\_{n}$ ?

## **1.5 TUJUAN PENELITIAN**

Adapun tujuan penelitian yang diharapkan dalam penelitian ini adalah:

1. Menentukan dan membuktikan perumuman bilangankromatikpadagraf korona$C\_{m}⊙C\_{n}$ dan $C\_{m}⊙K\_{n. }$
2. Menentukan dan membuktikan perumuman bilangankromatikpermainan padagrafkorona$C\_{m}⊙C\_{n}$ dan $C\_{m}⊙K\_{n. }$

## **1.6 MANFAAT PENELITIAN**

 Manfaatdaripenulisanpenelitianiniantara lain adalahsebagaiberikut:

1. Penulismemperolehwawasandanpengetahuanbarumengenaiteorigraf.
2. Memberikantambahanwawasanbagiparapembacamengenaibilangankromatikpermainanpadakelasgrafkorona.
3. Dapatdijadikanreferensibagiparapeneliti yang akanmelakukanpenelitianlanjutanataupunpenelitian lain.

## **1.7 ANGGAPAN DASAR**

 Dalamupayamengkajipenelitianinisupayasesuaidengantujuan yang diharapkan, penulismemberikanbeberapaanggapandasaryaknisebagaiberikut:

1. Bilangankromatikpadagrafbisadicaridenganmudahdenganmenggunakanberbagaicaranamununtukperumumannyacukuprumituntukdilakukan.
2. Penentuanbilangankromatikpermainanpadagrafjugabisadenganmudahdicarijikasudahmengetahuibilangankromatiknya, namununtukperumumannyajugacukuprumituntukditentukan.