# **BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

## **2.1 Teori Graf**

Secara matematis, sebuah graf terdiri atas sebuah himpunan tak kosong dimana setiap elemen himpunan disebut sebagai simpul *(vertices)* dan himpunan dimana setiap elemen himpunan disebut sebagai sisi *(edges)*. Umumnya suatu graf dinotasikan sebagai Jadi, sebuah graf dimungkinkan untuk tidak mempunyai sisi, tetapi harus memiliki titik minimal satu. (Prasancika, 2021). Banyaknya titik yang ada pada graf adalah , dan disebut orde *(order)* dari , sedangkan banyak sisi pada graf adalah disebut ukuran *(size)* dari gambar 2.1 menunjukkan sebuah graf, misalkan graf mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi Sehingga dan



Gambar 2.1 Contoh Graf

Titik dan pada graf dikatakan berdampingan atau bertetangga *(adjacent)* jika terdapat sebuah sisi yang menghubungkan antara dan, yaitu . Dengan demikian, dan dikatakan bersisian *(incident)* dengan sisi . Gambar 2.1 menujukkan jika titik bertetangga dengan titik dan

tetapi tidak bertetangga dengan . Titik bersisian dengan dan . Derajat dari titik pada adalah banyaknya sisi yang bertemu pada suatu titik. Jika titik yang mempunyai derajat disebut titik terisolasi *(isolated vertex)*. Titik dengan derajat satu disebut titik akhir *(end vertex).* Jika semua titik pada graf mempunyai derajat yang sama makan dikatakan dengan graf regular atau teratur. Banyaknya sisi minimum pada suatu titik di graf diantara titik-titik lainnya di graf disebut derajat terkecil dinotasikan dengan . Sedangkan banyaknya maksimal sisi yang bersisian pada suatu titik di graf disebut derajat terbesar dinotasikan dengan . Graf pada gambar 2.1 mempunyai barisan derajat sedangkan dan .

**2.2 Jenis-jenis Graf** Graf akan dikelompokkan kedalam beberapa jenis yang sesuai dengan sudut pandang pengelompokannya. Dimana, pengelompokkan graf dapat dinilai melalui tidak adanya rusuk yang ganda berdasarkan dengan jumlah simpul maupun berdasarkan dari orientasi arah pada rusuk tersebut. (Munir, 2012)

Secara umum, graf sendiri digolongkan kedalam dua jenis, yaitu graf sederhana dan graf tidak sederhana, yang akan dijelaskan sebagai berikut:

### 2.2.1 Graf Sederhana (*Simple Graph*)

Menurut (Pramesthi, 2020) graf sederhana merupakan graf yang tidak memiliki rusuk ganda dan atau gelang. Dimana rusuk merupakan sebuah pasangan yang tidak terurut (*unordered pairs*). Selain itu, menurut (Munir, 2012) graf sederhana juga dapat diartikan sebagai graf yang terdiri dari himpunan tak kosong simpul-simpul dan himpunan pasangan tidak terurut yang berbeda yang kemudian disebut sebagai rusuk. Dalam beberapa graf khusus sering menggunakan graf sebagai berikut:

* Graf lengkap (*complete graph*)merupakan sebuah graf sederhana yang pada setiap dua simpulnya saling bertetangga.
* Graf lingkaran merupakan sebuah graf sederhana yang pada setiap simpulnya berderajat dua.
* Graf teratur(*regular graph*) merupakan sebuah graf yang pada setiap simpulnya memiliki derajat yang sama.
* Graf bipartit (*bipartitr graph*) merupakan sebuah graf yang mana simpul terhubung dengan simpul pada yang kemudian dinyatakan dengan

### 2.2.2 Graf Tak Sederhana (*Unsimple Graph*)

Menurut (Pramesthi, 2020)menyatakan bahwa graf yang didalamnya mengandung rusuk ganda atau gelang akan dinamakan dengan graf tak sederhana (*unsimple graph*). Terdapat dua macam graf dalam graf tak sederhana, yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudigraph*). Dimana graf ganda merupakan graf yang didalamnya mengandung rusuk ganda. Sedangkan, graf semu merupakan graf yang didalamnya mengandung gelang (*loop*).

Selain itu, graf tak sederhana juga dapat dikelompokkan berdasarkan orientasi arah pada rusuknya. Dimana, orientasi arah tersebut dibagi menjadi dua yaitu graf tak berarah dan graf berarah(Bondy & Murty, 2008)

* Graf tak berarah (*undirected graph*) merupakan sebuah graf yang rusuknya tidak mempunyai orientasi arah.
* Graf berarah (*directed graph*) merupakan sebuah graf yang setiap rusuknya mempunyai orientasi arah.

## **2.3 Kelas Graf Yang Akan Dikaji**

Adapun kelas graf yang akan dikaji untuk dicari bilangan kromatik permainannya adalah sebagai berikut :

### 2.3.1 Graf Lengkap (*Complete graph*)

Graf lengkap dengan titik dengan simbol adalah graf sederhana dengan titik, dimana setiap 2 titik berbeda dihubungkan dengan suatu garis.

**Teorema 2.1.** Banyak garis dalam suatu graf lengkap dengan titik adalah buah.

**Bukti:**

Misalkan adalah suatu graf lengkap dengan titik .

Ambil sembarang titik (sebutlah . Oleh karena merupakan graf lengkap, maka dihubungkan dengan titik lainnya Jadi, ada buah garis.

Selanjutnya, ambil sembarang titik kedua (sebutlah ). Oleh karena adalah graf lengkap, maka juga dihubungkan dengan semua titik sisanya sehingga ada buah garis yang berhubungan dengan . Salah satu garis tersebut menghubungkan dengan . Garis itu sudah diperhitungkan pada waktu menghitung banyaknya garis yang berhubungan dengan Jadi, ada garis yang belum diperhitungkan.

Proses selanjutnya dengan menghitung banyaknya garis yang berhubungan dengan dan yang belum diperhitungkan sebelumnya. Banyak garis yang didapatkan berturut-turut adalah , , ,

Jadi, secara keseluruhan terdapat buah garis.



Gambar 2.2 Contoh Graf Komplit

### 2.3.2 Graf Siklus (*Cycle graph*)

Graf siklus *(cycle)* adalah graf sederhana yang 2setiap titiknya berderajat dua. Graf siklus atau graf lingkaran dengan titik dan sisi dan dinotasikan dengan . (Wilson, 1998) Graf yang terbentuk dari dengan menghilangkan sebuah sisinya disebut graf lintasan. Graf tersebut dinotasikan dengan , bila merupakan banyaknya anggota himpunan titiknya, dimana



Gambar 2.3 Contoh Graf *Cycle*

## **2.4 Pewarnaan Graf**

Pewarnaan graf *(graph coloring)* adalah kasus khusus pada pelabelan graf. Pelabelan disini maksudnya yaitu memberikan warna pada titik-titik pada batas tertentu. Ada tiga macam persoalan pewarnaan graf *(graph coloring)* yaitu pewarnaan titik *(vertex coloring),* pewarnaan sisi *(eddge coloring)*, dan pewarnaan wilayah *(region coloring)* (Munir, 2012)

### 2.4.1 Pewarnaan Titik

Pewarnaan titik pada graf merupakan pemberian warna pada titik-titik graf satu warna untuk setiap titik sehingga titik-titik yang bertetangga diwarnai dengan warna yang berbeda (Chartrand & Zhang, 2002). Adapun warna yang dapat digunakan berupa elemen dari sembarang himpunan ataupun bilangan positif . Dengan demikian pewarnaan titik dapat dianggap sebagai fungsi , dimana adalah bilangan bulat positif sedemikian sehingga jika dan merupakan titik yang bertetangga. Contoh pewarnaan titik *(vertex coloring)* diperlihatkan pada gambar dibawah ini.



Gambar 2.4 Pewarnaan Graf Pada Titik

### 2.4.2 Pewarnaan Sisi

Pewarnaan sisi *(edge coloring)* yaitu memberikan warna yang berbeda pada sisi yang bertetangga sehingga kedua sisi yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Suatu pewarnaan sisi- untuk graf adalah suatu penggunaan sebagian atau semua warna untuk mewarnai semua sisi sehingga setiap pasang sisi yang mempunyai titik persekutuan diberi warna yang berbeda (Purwanto, 1998). Pewarnaan sisi dapat digambarkan sebagai fungsi sedemikian sehingga untuk setiap sisi dan yang bertetangga pada . Jika mempunyai warna sisi-, maka dikatakan sisi-sisi di diwarnai dengan warna. Contoh pewarnaan sisi *(edge coloring)* diperlihatkan pada gambar dibawah ini.



Gambar 2.5 Pewarnaan Graf Pada Sisi

### 2.4.3 Pewarnaan Wilayah atau Bidang

Pewarnaan wilayah atau bidang yaitu memberikan warna pada bidang sehingga tidak ada bidang yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Sedangkan, menurut(Fran, 2019)pewarnaanwilayahbiasanyadigunakanuntukpewarnaanpetadanmenemukanpermasalahanterkaitpemetaandaerah di suatukabupatenataukota. Dari beberapadefinisidiatasdapatdisimpulkanbahwapewarnaanwilayahbiasadigunakandalampemetaanataupenggambaransuatuwilayahdantempattertentu.

## **2.5 Operasi Graf Korona**

Terdapat beberapa cara untuk mengoperasikan graf sehingga menghasilkan graf yang baru. Operasi graf merupakan gabungan dari dua buah graf yang dioperasikan menggunakan jenis operasi tertentu yang nantinya akan menghasilkan graf yang berbeda dari graf asalnya. Pada penelitian ini, operasi graf yang digunakan yaitu operasi korona yang dinotasikan dengan .

Operasi graf korona didefenisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil duplikat dari graf kedua, kemudian titik yang ada pada graf pertama dihubungkan kesetiap titik yang ada pada graf kedua dioperasikan sebanyak titik yang ada pada graf pertama. Menurut (Nada et al., 2017) misal dan merupakan dua buah graf. Operasi graf korona dari dan dinotasikan oleh didefenisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah salinan dan salinan dari dan titik ke dari salinan graf dihubungkan oleh sebuah sisi dengan setiap titik pada salinan ke dari .

Berikut diberikan dua buah graf siklus yaitu dan diilustrasikan dalam bentuk gambar sebagai berikut:



Gambar 2.6 Graf dan

Graf hasil operasi korona dua graf siklus dan dinotasikan dengan . Himpunan titik graf hasil operasi tersebut memiliki anggota sebanyak dengan himpunan simpulnya adalah , , ,,, , , , , , , dan . dan himpunan sisinya memiliki jumlah anggota sebanyak dengan himpunan sisinya adalah , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , , dan .

Graf hasil operasi korona antara dan ditunjukkan sebagai berikut:



Gambar 2.7

## **2.6 Bilangan Kromatik**

Bilangan kromatik merupakan sasaran utama dari pewarnaan titik pada suatu graf, dimana bilangan kromatik menunjukkan minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik pada graf, sedemikian sehingga setiap dua titik yang berhubungan langsung mendapatkan warna yang berbeda (Setiawan, 2012)

Berdasarkan domainnya, pewarnaan graf dibedakan menjadi tiga yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi dan pewarnaan wilayah. Warna yang digunakan dapat berupa elemen dalam himpunan apapun seperti himpunan warna sesungguhnya (biru, hijau, kuning, merah, dsb) yang sering digunakan ketika hanya diperlukan sejumlah kecil warna atau himpunan bilangan bulat positif dimana juga bisa melambangkan warna dalam jumlah banyak. Bilangan bulat terkecil sehingga graf mempunyai pewarnaan titik sejati dengan warna disebut bilangan kromatik yang dinotasikan dengan . (Puspasari & Dafik, 2014)

Pewarnaan titik pada graf merupakan pemberian warna pada setiap titik-titik di graf , dimana dengan mewarnai setiap titik sehingga titik-titik yang bertetangga diwarnai dengan warna yang berbeda. Dalam hal ini, untuk mendapatkan bilangan kromatik graf corona, langkah awal yang ditempuh adalah melakukan operasi graf corona terlebih dahulu untuk mendapatkan graf baru, yaitu graf yang berbeda dari graf asalnya. Setelah itu, kita dapat mencari bilangan kromatik dari graf corona yang diperoleh melalui operasi graf corona. Berikut akan dipaparkan beberapa teorema yang ditemukan oleh peneliti mengenai bilangan kromatik pada kelas-kelas graf:

1. Bilangan kromatik graf *Cycle*

**Teorema 2.2.**(Mujib, 2011)

Bukti:

Dari Gambar 2.3 dapatdilihatbahwagraf merupakan graf tertutup yang mana masing-masing verteks berderajat 2. Pandang dengan himpunan titik dapat membentuk sebuah segitiga, dengan demikian titik pasti bertetangga dengan titik dan begitu juga titik pasti bertetangga dengan titik dan sama halnya dengan titik pasti bertetangga dengan titik dan . Oleh karena itu untuk mewarnai ketiga titik yang saling bertetangga membutuhkan 3 warna yang saling berbeda.

Kemudianpandang dengan himpunan titik , karena masing-masing verteks berderajat 2 maka setiap verteks yang tidak saling bertetangga bisa diwarnai dengan warna yang sama. Misal diberikan dua warna, dan tidak saling bertetangga maka bisa diwarnai dengan warna yang pertama, sedangkan dan juga tidak saling bertetangga dapat diwarnai dengan warna kedua. Dengan demikian untuk mewarnai graf dengan genap dapat diwarnai dengan dua warna saja.

1. BilanganKromatik Graf Komplit

**Teorema 2.3.**

Bukti:

PadaGambar 2.2dapatdilihatbahwagrafmerupakangraf yang masing-masingverteksnyasalingterhubungdenganverteks yang lain. Dengan kata lain, setiapvertekssalingbertetanggadenganverteks yang lainnya. Sehinggauntukmewarnaigraf memerlukan warna sebanyak atau sebanyak verteks yang ada pada graf tersebut.

## **2.7 Bilangan Kromatik Permainan**

Seiring dengan berkembangnya teknologi dan ilmu pengetahuan, bilangan kromatik masih menjadi salah satu kajian yang menarik untuk dikaji perkembangannya hingga dimodifikasi menjadi sebuah permainan untuk mendapatkan bilangan kromatik permainannya. Pewarnaan titik pada graf merupakan pemberian warna pada setiap titik-titik di graf , dimana dengan mewarnai setiap titik sehingga titik-titik yang bertetangga diwarnai dengan warna yang berbeda (Chartrand & Zhang, 2002).

Dalam pewarnaan titik pada suatu graf menujukkan banyaknya warna minimum yang digunakan untuk mewarnai setiap titik pada graf , sedemikian sehingga setiap dua titik yang berhubungan langsung mendapatkan warna yang berbeda. Adapun warna yang dapat digunakan berupa elemen dari sembarang himpunan ataupun bilangan positif Banyaknya warna minimun yang digunakan untuk pewarnaan titik pada graf disebut dengan bilangan kromatik yang dinotasikan dengan (Puspasari & Dafik, 2014)

Bilangankromatikpermainandarigrafdidefinisikansebagaibilangan terkecil sedemikian sehingga mempunyai strategi untuk menang pada graf dengan warna, yang dinotasikanDalampermainanini, setiappemainmemilikitujuanmasing-masing yang hendak dicapai. Pemain bertujuan untuk mewarnaisemuatiitk yang adapadagraf dengan warna yang tersedia yang artinya jika semua titik dapat ia warnai maka dapat disimpulkan bahwa ialahpemenangnyadandengan kata lain iaharusmenentukanstrategiuntukmelakukan semua pewarnaan titik. Sedangkanpemain bertujuan untuk menghalangi tujuan pemain tercapai yang artinya ia harus menentukan strategi bagaimana caranya agar pemain tidak dapat mewarnai seluruh titik yang ada pada graf . Dengan melakukan pewarnaan secara bergiliran, keduapemainmewarnaiseluruh titik yang adapadagraf, dimana pemain sebagai pemain pertama memulai lebih dahulu dan sebagai pemain setelahnya. Bilangankromatikpermainanitusendirimemilikimaknabilangan terkecil sedemikian sehingga mempunyai strategi untuk menang pada graf dengan warna yang dinotasikan . (Mujib, 2011). Selain itu, senada dengan penelitian yang dilakukan oleh (Enomoto et al., 2022) dengan judul *‘Game Chromatic Number of Strong Product Graphs’* yaitu mencari bilangan kromatik permainan dari perkalian kuat graf, yang merupakan salah satu perkalian graf utama. Kemudian, disusul oleh penelitian lain yang dilakukan oleh (Bharadwaj & Mangam, 2022) dengan judul *‘The Total Game Chromatic Number of Paths, Cycles and Stars’* dimana dalam riset kelas graf dibatasi pada graf lintasan, graf siklus dan graf bintang untuk dicari bilangan kromatik permainannya.

Berdasarkan dari defenisi – defenisi dan hasil penelitian terdahulu, dapat disimpulkan bahwa dalam penentuan bilangan kromatik permainan pada graf atau harus ditentukan terlebih dahulu bilangan kromatik pada graf itu sendiri atau setelah melakukan operasi graf pada kelas graf tertentu, dalam hal ini operasi graf yang dilakukan adalah operasi graf corona.

## **2.8 Penelitian yang Relevan**

Dalam hal ini, ada beberapa penelitian terdahulu yang dijadikan sebagai acuan yang mendasar untuk melakukan penelitian selanjutnya, diantaranya sebagai berikut:

1. Penelitian T. Bartnicki, et al pada tahun 2008 yang berjudul *“Game Chromatic Number of Cartesian Product Graphs”* dimana dalam riset ini mencari bilangan kromatik permainan untuk produk Cartesian Nilai eksak dari dapat ditentukan ketika merupakan graf *cycle* atau graf lengkap. Hasil penelitian mengimplikasikan bahwa bilangan kromatik permainan tidak dibatasi dari atas oleh fungsi bilangan kromatik permainan dari graf dan . Hasil analogi yang diperoleh untuk bilangan pewarnaan permainan dari perkalian grafik Cartesian.
2. Penelitian Septinauli Simanjuntak & Mulyono 2021 yang berjudul *“Bilangan Kromatik Hasil Operasi Korona Graf Lingkaran dan Graf Kubik”* dalam penelitiannya yaitu menentukan pola bilangan kromatik dari graf hasil operasi korona pada kelas graf lingkaran dan graf kubik.
3. Penelitian Firmansyah dan Abdul Mujib pada tahun 2020 dengan judul “*Bilangan Kromatik Permainan Graf Hasil Operasi Korona”* dengan hasil bilangan kromatik permainan dari graf jika genap dan jika ganjil, jika , jika , dan jika , jika dan genap, jika dan ganjil dan jika .
4. Penelitian Abdul Mujib pada tahun 2011 yang berjudul “*Bilangan Kromatik Permainan pada Beberapa Graf Hasil Kali Tensor*” dengan hasil pada kelas graf dan graf dimana diperoleh nilai eksak bilangan kromatik permainannya cenderung dekat dengan batas bawah. Sedangkan, untuk kelas graf dan graf nilai eksak bilangan kromatik permainannya cenderung dekat dengan batas atas.
5. Penelitian Hikoe Enomoto, et al pada tahun 2021 dengan judul *“Game Chromatic Number of Strong Product Graphs”* dengan menentukan bilangan kromatik permainan graf bintang dan graf komplit dengan operasi perkalian graf.
6. Penelitian Harish Bharadwaj pada tahun 2022 dengan judul *“The Total Game Chromatic Number of Paths, Cycles and Stars”* dalam riset ini kelas graf yang dicari bilangan kromatik permainannya adalah graf lintasan, graf *cycle* dan graf bintang. Hasil penelitian menunjukkan untuk pada verteks , pada verteks dan .
7. PenelitianJ.NešetřildanE. Sopenatahun 2001 denganjudul “*On the Oriented Game Chromatic Number”*denganhasilbilangankromatikpermiananbernilai 7 padagraflintasanberarahsertamemilikibilangankromatikpohonberarah paling banyakberjumlah 19.
8. Penelitian Tom Bohman, Alan Frieze, dan Benny Sudakovpadatahun 2008 denganjudul*“The game chromatic number of random graphs”*denganhasilbahwabilangankromatikpermainanpadagrafacaksetidaknyaadalahdua kali bilangankromatikgrafacakitusendiri.
9. PenelitianBokhari, et al (2018) denganjudul “*Game chromatic number of cartesian and corona product graphs*” dengan hasil bahwa bilangan kromatik permainan tidak dibatasi pada kelas graf kartesian dan tidak dibatasi dari atas oleh fungsi oleh fungsi bilangan kromatik permainan graf dan .
10. Penelitian Aurelia Utaripadatahun 2019 yang berjudul “*BilanganKromatik Graf HasilOperasidanAplikasinyaPadaPermainanPewarnaan Graf*” denganhasilbilangankromatikgrafuntuk n dan m n ganjil, dan 2 untuklainnya.

Dan masihadabeberapapenelitianlagi yang dijadikansebagaireferensidalampenulisanpenelitianini.Sejauhinipenelitijugabelummenemukanpenelitian yang mengkajitentangbilangankromatikpermainanpadakelas grafoperasikoronakhususnyakelasgraf ) dan graf ( sehingga peneliti tertarik untuk melakukan penelitian mengkaji tentang bilangan kromatik permainan pada kelas graf tersebut.