# BAB II

# KAJIAN PUSTAKA

## Masalah Matematis

Hayes dalam Hamzah(Sahrudin, 2016 : 19) mengatakan bahwa, suatu masalah merupakan kesenjangan antara keadaan sekarang dengan tujuan yang ingin dicapai, sementara kita tidak mengetahui apa yang harus dikerjakan untuk mencapai tujuan tersebut. Sehingga, masalah dapat diartikan sebagai pertanyaan yang harus dijawab pada saat itu, sedangkan kita tidak mempunyai rencana solusi yang jelas. Menurut Posamentier dan Krulik(Rostika & Junita, 2017 : 37) mengemukakan pendapatnya mengenai masalah ‘*a problem is a situation that confronts the earner, that requires resolution, and for which the path to the answer is not immediately known’.* Berdasarkan pengertian yang dipaparkan oleh Posamentier dan Krulik, bahwa masalah merupakan suatu situasi yang dihadapi oleh seseorang yang memerlukan suatu pemecahan, serta di dalam menjawab permasalahan tersebut tidak dapat langsung ditemukan jawabannya.

Masalah dapat ditemukan dari berbagai hal, seperti pada saat belajar. Salah satunya dalam pembelajaran matematika. Menurut Suriasumantri(Astuti & Leonard, 2015 : 106) menyatakan, “matematika adalah bahasa yang melambangkan serangkaian makna dari pernyataan yang ingin kita sampaikan. Lambang-lambang matematika bersifat “artifisial” yang baru mempunyai arti setelah sebuah makna diberikan kepadanya. Tanpa itu maka matematika hanya merupakan kumpulan rumus-rumus yang mati”. Menurut Sujono dalam Fathani(Astuti & Leonard, 2015 : 107) mengemukakan pengertian matematika yaitu “Matematika merupakan ilmu pengetahuan tentang penalaran yang logic dan sebagai ilmu bantu dalam menginterpretasikan berbagai ide dan kesimpulan”. Sejalan dengan pendapat Sujono, Russeffendi(Siagian, 2016: 65) mengungkapkan bahwa matematika lebih menekankan kegiatan dalam dunia rasio (penalaran), bukan menekankan dari hasil eksperimen atau hasil observasi matematika terbentuk karena pikiran-pikiran manusia, yang berhubungan dengan idea, proses, dan penalaran.

Dari pendapat yang telah dikemukakan oleh beberapa para ahli tersebut, dapat didefinisikan bahwa masalah adalah suatu situasi yang memerlukan usaha dan tidak langsung didapat cara menyelesaiannya. Sedangkan matematika adalah ilmu pengetahuan yang mempelajari tentang kemampuan berfikir logis, analitis, sistematis, kritis dan kreatif serta kemampuan bekerjasama. Definisi-definisi tersebut dapat disimpulkan bahwa masalah matematika adalah suatu situasi yang penyelesaiannya terdapat ide-ide atau konsep matematika yang dihasilkan melalui berpikir logis, analitis, sistematis, kritis serta kreatif.

### 2.1.1 Proses Penyelesaian Masalah Matematis

Setiap masalah memerlukan upaya yang disebut dengan pemecahan masalah. Pemecahan masalah merupakan suatu upaya yang dilakukan seseorang dengan kemampuan berpikir yang kuat agar mendapatkan ide atau solusi dalam penyelesaiannya. Permasalahan matematika dapat diselesaikan melalui beberapa langkah atau tahapan proses. Sukayasa(Hidayati & Widodo, 2015: 136)memaparkan fase atau tahap dalam penyelesaian masalah yang dikemukakan oleh beberapa ahli yang disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 2. 1

Tahap dalam Pemecahan Masalah yang dikemukakan oleh beberapa Ahli

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Menurut Krulik & Rudnick | Menurut George Polya | Menurut John Dewey |
| 1. Membaca dan memikirkan (*Read and Think*)
2. Mengeksplorasi dan merencanakan (*Explore and Plan*)
3. Memilih suatu strategi (*Select a Strategy*)
4. Menemukan suatu jawaban (*Find an Answer*)
5. Meninjau kembali dan mendiskusikan (*Reflect and Extend*).
 | 1. Memahami masalah (*Understanding the Problem*)
2. Membuat rencana penyelesaian (*Devising a Plan*)
3. Melaksanakan rencana (*Carrying Out the Plan*)
4. Melihat kembali hasilnya (*Looking Back*)
 | 1. Pengenalan (*Recognition*)
2. Pendefinisian (*Definition*)
3. Perumusan (*Formulation*)
4. Mencobakan (*Test*)
5. Evaluasi (*Evaluation*)
 |

Adapun penjelasan setiap tahapan yang ada pada tabel di atas sebagai berikut :

1. Tahapan pemecahan masalah menurut Krulick dan Rudnick (Widodo & Aristiyo, 2019) sebagai berikut :
2. Membaca dan Berpikir *(Read and Think)*

Pada tahapan ini, setelah masalah ditemukan maka masalah tersebut harus dianalisis. Siswa harus memeriksa dan menaksir, menentukan pertanyaan dari masalah tersebut, keadaan yang tersaji kemudian harus divisualisasikan, dideskripsikan, dan dipahami. Masalah tersebut harus dapat diubah ke dalam bahasa yang biasa digunakan oleh siswa sendiri.

1. Menyelidiki dan Merencanakan*(Explore and Plan)*

Tahapan ini menunjukkan bahwa siswa menganalisis dan menetukan informasi yang cukup untuk memecahkan masalah.Pengecoh atau kalimat yang berlebih dapat dihilangkan, data yang ada diatur dalam bentuk tabel, gambar, sebuah model, dan sebagainya. Perencanaan lebih dikembangkan pada tahap ini.

1. Memilih Strategi*(Select a Strategy)*

Tahap yang ketiga ini menurut beberapa orang merupakan tahapan yang paling sulit. Strategi merupakan bagian dari proses pemecahan masalah yang dapat memberikan arah dan tujuan dalam memecahkan masalah tersebut. Rencana yang dipilih dipengaruhi oleh dua tahap sebelumnya. Pertanyaan yang sulit pada proses pemecahan masalah ialah strategi apa yang paling tepat digunakan untuk memecahkan masalah yang dihadapi. Hal ini dapat diselesaikan dengan banyak latihan. Apabila siswa berhasil menyelesaikan masalah, mereka harus terus berlatih dalam seni memecahkan masalah. Sehingga mereka dapat terbiasa dan bahkan dapat menggunakan berbagai jenis strategi dalam memecahkan masalah.

1. Menemukan Jawaban *(Find an Answer)*

Pada tahapan ini, kemampuan matematis sangat dibutuhkan untuk mencari jawaban. Kemampuan matematis ini didukung oleh perkiraan yang tepat. Dapat pula dibantu oleh kalkulator atau alat bantu lain.

1. Memikirkan Perkara Lain dan Memperluas *(Reflect and Extend)*

Pada tahap terakhir ini, siswa harus mengecek dengan tepat apakah kondisi awal dari masalah telah digabungkan, apakah pertanyaan sudah terjawab. Sebenarnya pada tahapan inilah proses berpikir kritis yang maksimal sangat dibutuhkan. Selain itu, alternatif jawaban pun harus ditemukan (bila ada) dan didiskusikan bersama. Permasalahan pun dapat diubah dengan memberi pertanyaan “bagaimana bila...”.Jika memungkinkan, proses ini dapat diperluas untuk menemukan generalisasi atau konsep matematika yang mendasari situasi yang ada pada masalah.

1. Tahapan pemecahan masalah menurut Polya (Winartia, Waluya, Rochmad, & Kartono, 2019) sebagai berikut :
2. Memahami masalah (*Understanding the Problem*)

Pada tahap memahami masalah, siswa diharapkan untuk menyatakan apa yang dia pahami dari masalah yang diberikan. Seperti menentukan yang diketahui dan ditanyakan dalam soal tersebut. Hal ini harus dilakukan sebelum siswa menyusun rencana penyelesaian dan melaksanakan rencana yang telah disusun.

1. Membuat rencana penyelesaian (*Devising a Plan*)

Pada tahap penentuan strategi, siswa diharapkan untuk menentukan langkah-langkah seperti perhitungan, gambar, dll. Dalam proses ini, guru dapat memberitahukan penggunaan strategi pemecahan masalah yang telah diajarkan dan dapat memungkinkan siswa untuk memilih strategi yang sesuai. Langkah ini menuntut siswa untuk dapat mengaitkan masalah dengan materi yang telah diperoleh, sehingga ditemukan penyelesaian masalah yang tepat.

1. Melaksanakan rencana (*Carrying Out the Plan*)

Tahap berikut mencakup penerapan strategi yang dipilih oleh siswa. Pada tahap ini, rencana yang telah disusun dapat digunakan untuk menyelesaikan soal dengan cara melaksanakan rencana yang telah dibuat langkah demi langkah.

1. Menafsirkan kembali hasilnya (*Looking Back*)

Hasil yang diperoleh dari melaksanakan rencana, siswa harus memeriksa kembali jawaban yang didapat, banyak siswa tidak melakukan tahap ini sehingga terjadi kesalahan dalam pengerjaannya, kemungkinan kesalahan yang dilakukan seperti salah dalam mensubtitusikan, pengoperasian, dan lain-lain.

1. Tahapan pemecahan masalah menurut John Dewey (Agustina, 2018) menjelaskan proses penyelesaian masalah sebagai berikut :
2. Menghadapi masalah (*Confront Problem*)

Yaitu merasakan suatu kesulitan. Proses ini bisa meliputi menyadari hal yang belum diketahui, dan frustasi pada ketidakjelasan situasi.

1. Pendefenisian masalah (*Define Problem*)

Yaitu mengklarifikasi karakteristik-karakteristik situasi. Tahap ini meliputi kegiatan mengkhususkan apa yang diketahui dan yang tidak diketahui, menemukan tujuan-tujuan, dan mengidentifikasi kondisi-kondisi yang standar dan ekstrim.

1. Penemuan solusi (*inventory several solution*)

Yaitu mencari solusi. Tahap ini bisa meliputi kegiatan memperhatikan pola-pola, mengidentifikasi langkah-langkah dalam perencanaan, dan memilih atau menemukan algoritma.

1. Menduga solusi pemecahan (*conjecture consequence of solution*)

Yaitu melakukan rencana atas dugaan solusi. Seperti menggunakan algoritma yang ada, mengumpulkan data tambahan, melakukan analisis kebutuhan, merumuskan kembali masalah, mencobakan untuk situasi-situasi yang serupa, dan mendapatkan hasil (jawaban)

1. Mencoba dugaan (*test concequences*)

Yaitu menguji apakah definisi masalah cocok dengan situasinya. Tahap ini bisa meliputi kegiatan mengevaluasi apakah hipotesis-hipotesisnya sesuai? Apakah analisis yang digunakan tepat? Apakah analisis sesuai dengan tipe yang ada? Apakah hasilnya masuk akal? dan apakah rencana yang digunakan dapat diaplikasikan di soal yang lain?

##  Proses Berpikir Matematis

Proses berpikir didefinisikan Ormrod(Ngilawajan, 2013 : 78) sebagai suatu cara merespon atau memikirkan secara mental terhadap informasi atau suatu peristiwa. Pendapat lain tentang proses berpikir dikemukakan oleh Suryabrata (Ngilawajan, 2013) yang menyatakan bahwa proses berpikir dapat diklasifikasikan ke dalam tiga langkah, yaitu: (1) pembentukan pengertian dari informasi yang masuk, (2) pembentukan pendapat dengan membanding-bandingkan pengetahuan yang ada sehingga terbentuk pendapat-pendapat, dan (3) penarikan kesimpulan. Proses berpikir merupakan suatu proses yang dilakukan seseorang dalam mengingat kembali pengetahuan yang sudah tersimpan di dalam memorinya untuk suatu saat dipergunakan dalam menerima informasi, mengolah, dan menyimpulkan sesuatu(Widyastuti, 2015 : 185).

 Katagiri(Sari, 2016 : 83) membagikan empat kategori logis dalam berpikir matematika yaitu sebagai berikut:

* 1. Sikap matematika; mencoba untuk memahami masalah sendiri atau tujuan, substansi dengan jelas oleh diri sendiri, mencoba untuk mengambil tindakan logis, mencoba untuk mengekspresikan materi dengan jelas dan ringkas, dan mencoba untuk mencari hal yang lebih baik.
	2. Berpikir matematika terkait dengan metode matematika; berpikir induktif, berpikir analogis, berpikir deduktif, berpikir integratif, berpikir abstraktif.
	3. Berpikir matematika terkait dengan isi matematika; memperjelas objek himpunan untuk dipertimbangkan dan objek untuk dikeluarkan dari himpunan, mengklarifikasi kondisi untuk dimasukkan (ide himpunan), fokus pada elemen dan ukuran serta hubungan(Ide unit), mencoba untuk berpikir berdasarkan prinsip-prinsip dasar ekspresi (Ide ekspresi), memperjelas dan memperluas makna suatu hal dan operasi dan mencoba untuk berpikir berdasarkan ide operasi, mencoba untuk merumuskan metode operasi (Ide dari algoritma), mencoba untuk memahami gambaran besar dari objek dan operasi, dan menggunakan hasilnya untuk pemahaman (Ide dari pendekatan), fokus pada aturan dasar dan sifat (Ide dari sifat dasar).
	4. Mencoba untuk fokus pada apa yang ditentukan oleh keputusan seseorang, menemukan aturan hubungan antara variabel, dan menggunakan sesuatu hal yang sama (Berpikir Fungsional), mencoba untuk mengekspresikan proposisi dan hubungan sebagai formula, dan untuk mengetahui tujuan (Ide formula).

Dalam berpikir matematika berkaitan dengan metode matematika yaitu berpikir induktif, berpikir analogis, berpikir deduktif, berpikir integratif, berpikir abstraktif (Sari, 2016).

1. Berpikir induktif

Berpikir induktif dalam bidang ilmiah yang bertitik tolak dari sejumlah hal khusus untuk sampai pada suatu rumusan umum sebagai hukum ilmiah. Proses berpikir induktif meliputi pengenalan pola, dugaan dan pembentukan generalisasi. Ketepatan sebuah dugaan atau pembentukan generalisasi dalam pola penalaran ini sangatlah tergantung dari data dan pola yang tersedia. Semakin banyak data yang diberikan atau semakin spesifik pola yang diberikan, maka akan menghasilkan sebuah dugaan atau generalisasi yang semakin mendekati kebenaran. Sebaliknya, semakin sedikit data yang diberikan atau semakin kurang spesifiknya pola yang disediakan, maka dugaan atau generalisasi bisa semakin jauh dari sasaran, dan bahkan bisa memunculkan dugaan atau generalisasi ganda.

Contoh berpikir induktif dalam kehidupan sehari-hari contohnya sebagai berikut : kucing berdaun telinga berkembang biak dengan melahirkan. kelinci berdaun telinga berkembang biak dengan melahirkan. Panda berdaun telinga berkembang biak dengan melahirkan.
Kesimpulan : semua hewan yang berdaun telinga berkembang biak dengan melahirkan.

1. Berpikir Deduktif

Berpikir deduktif adalah proses pengambilan kesimpulan yang didasarkan kepada premis-premis yang keberadaannya telah ditentukan. Secara deduktif matematika menemukan pengetahuan yang baru berdasarkan premis-premis tertentu. Pengetahuan yang ditemukan ini sebenarnya hanyalah konsekuensi dari pernyataanpernyataan ilmiah yang telah kita temukan sebelumnya. Matematika tidak menerima generalisasi berdasarkan pengamatan (induktif), tetapi harus berdasarkan pembuktian deduktif. Deduktif adalah pengambilan kesimpulan untuk suatu atau beberapa kasus khusus yang didasarkan kepada suatu fakta umum.

Contoh berpikir deduktif dalam kehidupan sehari-hari contoh nya sebagai berikut :

 Premis 1 = Semua makhluk adalah ciptaan tuhan. (U)

 Premis 2 = Manusia adalah makhluk hidup. (U)

 Simpulan = Manusia adalah makhluk ciptaan tuhan. (K)

1. Berpikir Analogi

Analogi dalam kamus bahasa Indonesia diartikan sebagai persamaan atau persesuaian antara dua hal yang berbeda. Menurut Soekadijo (Sari, 2016) analogi adalah berbicara tentang dua hal yang berlainan, yang satu bukan yang lain, tetapi dua hal yang berbeda itu dibandingkan satu dengan yang lain. Mundiri (Sari, 2016) mengemukakan bahwa terdapat dua analogi yaitu:

1. Analogi Deklaratif

Analogi deklaratif adalah analogi yang digunakan untuk menjelaskan sesuatu yang belum diketahui atau masih sama, dengan menggunakan hal yang sudah dikenal.

 Contoh :Menjelaskan angka 24



1. Analogi Induktif

Analogi induktif adalah analogi yang disusun berdasarkan persamaan prinsip dari dua hal yang berbeda, selanjutnya ditarik kesimpulan bahwa apa yang terdapat pada hal pertama terdapat pula hal yang kedua.

Contoh :



1. Berpikir Integratif

Berpikir integratif terdapat dua komponen yaitu internal dan eksternal. Internal terdiri atas tujuan, materi pelajaran, metode, media dan evaluasi. Komponen eksternal mencakup guru, orang tua dan masyarakat sekelilingnya.

Contoh berpikir integratif dalam kehidupan sehari-sehari sebagai berikut :

1. Masyarakat umum beranggapan bahwa orang miskin di negara berpenduduk besar sulit hidup sehat sebab harga obat tidak terjangkau. Jika wabah penyakit melanda, sebagian besar penderita tak akan selamat. Ini dianggap sebagai realita atau kebenaran. Pribadi inovatif tak mau menerima ini sebagai kebenaran. Ia akan berusaha mengubah kondisi ini.
2. Kuliah di perguruan tinggi perlu biaya besar, khususnya jika tidak didukung beasiswa. Orang inovatif tidak bisa menerima keadaan seperti ini dan akan menganggap keadaan ini bisa diubah. Sikap seperti ini bisa melahirkan banyak perubahan besar di dunia pendidikan seperti yang terjadi di Afrika Selatan.
3. Berpikir Abstrak

Berpikir abstrak adalah salah satu jenis kemampuan yang merupakan atribut inteligensi. Menurut Termen (Sari, 2016) kemampuan berpikir abstrak ini adalah suatu aspek yang penting dari inteligensi, tetapi bukan satu-satunya aspek. Aspek yang ditekankan dalam kemampuan berpikir abstrak adalah penggunaan efektif dari konsep-konsep serta simbol-simbol dalam menghadapi berbagai situasi khusus dalam menyelesaikan sebuah *problem*.

Contoh berpikir abstrak dalam matematika sebagai berikut :

1. Konsep bilangan tiga, konsep bilangan tiga merupakan ide abstrak mengenai bilangan tiga, namun di tunjukkan dengan simbol 3 atau III (tiga romawi), dll sebagai representasi konsep bilangan, jadi bilangan tiga dibuat seolah-olah nyata, karena representasi tersebut, begitu juga konsep teorema phytagoras, yaitu kuadrat panjang sisi miring sama dengan kuadrat jumlah kedua sisinya, ini merupakan ide abstrak tapi di representasikan, kadang dengan gambar dan sisi-sisinya di ganti dengan variabel a2 + b2 = c2, jadi konsep teorema phytagoras dibuat seolah-olah nyata, padahal itu hanya merupakan ide abstrak atau sebuah konsep. Dan banyak lagi konsep-konsep yang lain dalam dunia matematika yang merupakan ide abstrak yang dimana semuanya dapat di representasikan, dengan tujuan menunjukkan bahwa konsep tersebut seolah olah nyata.

**2.2.1 Metode Pengambilan Kesimpulan/keputusan**

Kesimpulan merupakan hasil akhir dari sebuah pemikiran. Kesimpulan juga dapat dikatakan sebagai sebuah gagasan yang tercapai pada akhir pembicaraan. Pada bahasan logika matematika, kesimpulan adalah suatu proposisi dari beberapa premis atau argumen/ide pemikiran dengan aturan – aturan yang telah ditetapkan. Penarikan kesimpulan dalam logika matematika sama dengan mendapatkan argumen yang tidak bertentangan dengan premis – premis. Kesimpulan yang sah didapatkan melalui metode penarikan kesimpulan dalam logika matematika. Apa saja ketiga metode yang digunakan dalam mendapatkan kesimpulan yang sah?

Ada 3 metode penarikan kesimpulan dalam logika matematika. Ketiga metode tersebut adalah modus ponens, modus tollens, dan silogisme. Penjelasan lebih lanjut mengenai tiga metode penarikan kesimpulan akan diulas pada masing – masing bahasan di bawah.

## **1. Modus Ponens**

Penarikan kesimpulan modus ponens mengikuti aturan kesimpulan yang sah untuk jika p maka q dan p maka q harus benar. Premis pertama pada modus ponens berupa implikasi, yaitu jika p maka q, sedangkan premis kedua berupa proposisi tunggal, yaitu p. Kesimpulan yang sah dari argumen tersebut berupa proposisi tunggal, yaitu q.

Sebagai contoh: diketahui dua premis jika hari ini langit mendung maka hari ini akan hujan dan hari ini langit mendung. Premis pertama berupa proposisi majemuk dengan operator logika penghubung berupa implikasi. Premis pertama terdiri atas dua proposisi tunggal, yaitu p = hari ini langit mendung dan q = hari ini akan hujan. Premis kedua berupa sebuah proposisi tunggal, yaitu hari ini akan hujan. Kesimpulan yang sah dari argumen tersebut menurut metode penarikan kesimpulan modus ponens adalah **hari ini akan hujan**.



Kesimpulan yang sah pada modus ponens ini dapat dibuktikan melalui tabel kebenaran. Hasil akhir nilai kebenaran dari kesimpulan pada modus ponens berupa tautologi. Nilai kebenaran berbentuk tautologi pada kolom (p → q ∧ p) → q dapat menjadi bukti bahwa modus ponens merupakan kesimpulan yang sah/berlaku.



## **2. Modus Tollens**

Kesimpulan yang sah dengan metode modus tollens menggunakan kontraposisi dari implikasi. Hasil kesimpulan merupakan penerapan dari kebenaran umum yang menyatakan bahwa jika sebuah pernyataan bernilai benar maka kontra positifnya juga benar. Diasumsikan jika p maka q (p q) bernilai benar dan diketahui ingkaran q (~q) bernilai benar. Sehingga, agar implikasi dari p dan q bernilai benar maka ingkaran p harus benar.

Sebagai contoh: diketahui dua premis jika hari ini langit mendung maka hari ini akan hujan dan hari ini ***tidak*** akan hujan. Premis pertama terdiri atas dua proposisi tunggal, yaitu p = hari ini langit mendung dan q = hari ini akan hujan. Premis kedua berupa sebuah proposisi tunggal bernilai benar, yaitu hari ini tidak akan hujan. Kesimpulan yang sah dari argumen tersebut menurut metode penarikan kesimpulan modus tollens adalah **hari ini langit tidak mendung**.



Bukti dari kesimpulan yang sah untuk modus tollens juga dapat dibuktikan melalui tabel kebenaran. Bukti yang benar akan menunjukkan bentuk tautologi pada kolom (p → q ∧ ~q) → ~p. Perhatikan bukti bahwa modus tollens merupakan kesimpulan yang sah/berlaku pada tabel kebenaran berikut.



## ****3. Silogisme****

Kesimpulan yang sah dari metode silogisme merupakan kesimpulan dari keadaan yang umum ke yang khusus. Silogisme disusun dari dua pernyataan/argumen dengan sebuah kesimpulan/konklusi. Aturan dasar penarikan kesimpulan silogisme menyatakan bahwa jika p maka q dan r, keduanya bernilai benar, maka jika p maka r juga bernilai benar.

Sebagai contoh: diketahui dua premis jika hari ini langit mendung maka hari ini akan hujan dan jika hari ini akan hujan maka Doni akan membawa payung. Premis pertama terdiri atas dua proposisi tunggal, yaitu p = hari ini langit mendung dan q = hari ini akan hujan. Premis kedua juga terdiri dari dua sebuah proposisi tunggal, yaitu hari ini akan hujan dan Doni membawa payung. Kesimpulan yang sah dari argumen tersebut menurut metode penarikan kesimpulan silogisme adalah **jika hari ini langit mendung maka Doni membawa payung**.



Bukti dari kesimpulan yang sah untuk silogisme juga dapat dibuktikan melalui tabel kebenaran. Bukti yang benar akan menunjukkan bentuk tautologi pada kolom [(p → q) ∧ (q → r)] → (p→r). Perhatikan bukti silogisme melalui tabel kebenaran berikut.



**2.3 Berpikir *Pseudo***

*Pseudo* diartikan oleh Peter dan Yeni(Subanji, 2011 : 3) yaitu sebagai sesuatu yang tidak sebenarnya atau sesuatu yang semu. Sehingga orang yang melakukan proses berpikir *pseudo* adalah pemikiran yang seakan-akan sudah sesuai melalui proses penalaran. Sejalan dengan pendapat Zahir (2019) yang menyatakan bahwa nilai yang terlihat dari suatu proses penyelesaian masalah bukan berasal dari keluaran mental pemikiran yang sebenarnya. Sehingga terjadi kemungkinan siswa tidak melakukan proses berpikir dengan benar untuk mendapatkan solusi dari masalah. Subanji dan Toto (2013) menyatakan bahwa kesalahan yang dibuat siswa kadangkala tidak sepenuhnya salah. Siswa melakukan apa yang disebut berpikir *pseudo*, *pseudo-benar*  dan *pseudo-salah*. *Pseudo-benar* terjadi ketika siswa memeroleh jawaban benar tetapi sebenarnya penalarannya salah. *Pseudo-salah* terjadi ketika jawaban siswa salah, tetapi sebenarnya siswa tersebut mampu bernalar secara benar.

Berpikir *pseudo* pertama kali dikenalkan oleh Vinner melalui artikelnya. Vinner(Wibowo, Purwoko, & Swaraswati, 2019 : 117) mengungkapkan bahwa dalam pembelajaran matematika, siswa diharapkan mampu memikirkan tentang konsep, makna dan hubungannya, maka siswa dikatakanberada pada mode berpikir konseptual. Akan tetapi apabila siswa tidak melakukannya, tetapi berhasil dalam menghasilkan jawaban yang tampaknya konseptual, maka siswa dikatakan berada pada mode berpikir *pseudo* konseptual. Jika siswa bertindak sesuai dengan proses berpikir yang seharunya dalam memecahkan masalah matematika, maka siswa dikatakan berada pada mode berpikir analitik. Akan tetapi jika siswa tidak melakukannya dengan cara yang beragam, tetapi berhasil dalam membuat jawaban yang tampaknya analitikdalam memecahkan masalah maka ini akan digambarkan dalam mode berpikir *pseudo* analitik.

Berdasarkan penjelasan diatas, Fitriani(Mufida, 2018 : 10) mengkriteriakan berpikir *pseudo* menjadi sebagai berikut:

Tabel 2. 2

Kriteria Jenis Berpikir *Pseudo*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Jenis Berpikir *Pseudo*** | **Indikator** | **Kode Indikator** |
| *Pseudo* Konseptual | * + 1. Siswa memberikan jawaban yang tidak memenuhi persyaratan yang dituntut dalam soal dan jawaban tersebut tidak didasari konsep yang benar.
 | PK1 |
| * + 1. Siswa dapat memberikan jawaban yang benar, tetapi prosedur penyelesaian yang dilakukan tidak didasari dengan konsep yang benar.
 | PK2 |
| * + 1. Siswa memberikan jawaban yang spontanitas, hanya menduga-duga tanpa mengkaitkan dengan konsep yang telah ada
 | PK3 |
| *Pseudo* Analitik | 1. Ada jawaban, tetapi tidak melalui proses berpikir yang bermakna, artinya pernyataan-pernyataan atau pendapat yang digunakan tidak sesuai atau tidak relevan dengan soal yang diberikan.
 | PA1 |
| 1. Jawaban yang diberikan benar dan sesuai dengan prosedur, tetapi tidak ada alasan yang kuat mengapa prosedur tersebut digunakan.
 | PA2 |

Siswa yang proses berpikirnya *pseudo* akan cenderung mengaitkan masalah yang sedang dihadapi dengan masalah sebelumnya yang dianggapnya sama. Berpikir *pseudo* merupakan berpikir semu sehingga jawaban benar belum tentu dihasilkan dari suatu proses berpikir yang benar dan jawaban salah juga belum tentu dihasilkan dari suatu proses berpikir yang salah (Husnah, 2018 : 11).

Menurut subanji (Santoso, 2017) terkait proses terjadinya berpikir *pseudo* diantaranya karena :

1. Ketidaklengkapan substruktur berpikir dalam proses asimilasi

Asimilasi merupakan proses pengintegrasian stimulus baru ke dalam skema yang sudah terbentuk.

1. Ketidaklengkapan substruktur berpikir dalam proses akomodasi

Akomodasi merupakan proses pengintegrasian stimulus baru melalui pengubahan skema lama atau pembentukan skema baru untuk menyesuaikan dengan stimulus yang diterima

1. Ketidaksesuaian penggunaan substruktur berpikir dalam proses asimilasi dan akomodasi

Ketidaklengkapan substruktur berpikir dalam proses asimilasi ditandai oleh ketidaksesuaian prosedur dengan karakteristik masalah tetapi langsung digunakan untuk menyelesaikan masalah. Ketiadaan proses refleksi mengakibatkan tidak adanya kontrol terhadap kebenaran jawaban.

Kemampuan penalaran tentang kovariasi didefinisikan secara formal oleh Carlson (Subanji, 2011) sebagai aktivitas kognitif yang melibatkan pengkoordinasian dua macam kuantitas yang berkaitan dengan cara-cara dua kuantitas tersebut berubah satu terhadap yang lain, dan mereka menyebutnya dengan istilah “penalaran kovariasional”. Penalaran *pseudo* adalah penalaran yang semu. Proses penalaran *pseudo* merupakan proses berpikir yang nampak “seperti” proses penalaran, namun sebenarnya belum merupakan proses penalaran, karena tidak menggunakan proses berpikir yang logis atau bersifat analitis(Subanji, 2011: 6).

Selanjutnya *pseudo* dalam penalaran kovariasional atau *pseudo* penalaran kovasiasional diartikan sebagai kovariasional yang semu. Seseorang yang berada pada penalaran kovariasional *pseudo*, dia terlihat seperti bernalar kovariasional (mengkoordinasikan perubahan satu variabel terhadap variabel lain), namun penalaran kovariasionalnya masih semu. Dalam hal ini penalaran kovariasional semu siswa adalah penalaran kovariasional sebelum refleksi, bahwa siswa memberikan jawaban salah, namun sebenarnya siswa tersebut mampu menyelesaikannya secara benar setelah refleksi(Subanji, 2011 : 7).

Dalam menyelesaikan suatu masalah, terdapat beberapa kemungkinan jawaban yang terjadi pada siswa. Untuk siswa yang memberikan jawaban benar dan mampu memberikan justifikasi, berarti jawabannya “betul sungguhan”, hal ini sudah wajar. Sebaliknya, siswa yang menunjukkan jawaban benar, tetapi tidak mampu memberikan justifikasi terhadap jawabannya, maka kebenaran jawabannya hanya “kebetulan”. Sedangkan siswa yang menunjukkan jawaban salah dan setelah refleksi tetap menghasilkan jawaban salah, berarti penalaran siswa tersebut memang “salah sungguhan”. Perilaku lain yang mungkin adalah siswa memberikan jawaban salah, tetapi setelah melakukan refleksi mampu membenahinya sehingga menjadi jawaban benar. Ini berarti penalaran siswa (sebelum refleksi) tersebut masih belum sungguhan (atau masih *pseudo*). Selanjutnya perilaku siswa ini disebut penalaran kovariasional *pseudo* dari jawaban “salah” (Subanji, 2011).

### 2.4 Proses Bernalar

Menurut Small(Arifin, Kirana, & Widodo, 2017 : 9) bernalar merupakan suatu penjelasan yang menunjukkan kaitan atau hubungan antara dua hal atau lebih yang atas dasar alasan-alasan tertentu dan dengan langkah-langkah tertentu sampai pada kesimpulan. Bernalar juga dikatakan sebagai proses berpikir logis yang menggunakan induktif dan deduktif untuk menarik suatu kesimpulan menurut Santrock (Arifin, Kirana, & Widodo, 2017). Dengan kata lain, menurut Sumantri(Firmanti, 2017 : 76) proses bernalar adalah proses berpikir siswa secara logis menurut alur kerangka berpikir atau aturan tertentu berdasarkan bukti-bukti yang ada dalam menarik suatu kesimpulan yang berupa pengetahuan.

Menurut Amir (Nikmah, 2018) dalam proses pembelajaran tertumpu pada dua macam proses bernalar, yaitu induktif dan deduktif. Rosita (Nikmah, 2018) menjelaskan proses bernalar tersebut yaitu proses bernalar induktif merupakan aktivitas berpikir untuk menarik kesimpulan atau membuat pernyataan baru yang bersifat umum berdasarkan pada pernyataan khusus yang diketahui benar. Sedangkan proses bernalar deduktif merupakan kebenaran suatu konsep atau pernyataan yang diperoleh sebagai akibat logis dari kebenaran sebelumnya.

Sumarmo dalam Kusnadi (Nikmah, 2018) memberikan indikator proses bernalar matematika, yaitu sebagai berikut: 1) membuat analogi dan generalisasi; 2) memberikan penjelasan dengan menggunakan model; 3) menggunakan pola dan hubungan untuk menganalisis situasi matematika; 4) menyusun dan menguji konjektur; 5) memeriksa validitas argumen; 6) menyusun pembuktian langsung; 7) menyusun pembuktian tidak langsung; 8) memberikan contoh penyangkal dan 9) mengikuti aturan enferensi.

### Penalaran Kovariasi

Penalaran menurut Peter dan Yeni (Subanji, 2011) berasal dari nalar. Nalar diartikan sebagai aktvitas untuk berpikir logis atau kemampuan/jangkauan berpikir. Lebih jauh ditegaskannya bahwa penalaran merupakan pengembangan sesuatu dengan menggunakan nalar (tidak berdasarkan pada perasaan atau pengalaman saja) atau proses dalam memberikan fakta dengan berprinsip pada nalar. Menurut Shadiq (Firmanti, 2017) penalaran (jalan pikiran atau *reasoning)* dapat diartikan sebagai: “Proses berpikir yang berusaha menghubung-hubungkan fakta-fakta atau evidensi-evidensi yang diketahui menuju kepada suatu kesimpulan”.

Subanji (Umah, As’ari, & Sulandra, 2016) mengungkapkan bahwa penalaran merupakan proses berpikir yang mencakup berpikir dasar, berpikir, kritis, dan berpikir kreatif namun tidak termasuk mengingat. Tahapan berpikir paling rendah hanya berdasarkan ingatan. Tahapan selanjutnya yang lebih tinggi yaitu berpikir dasar yang merupakan bentuk paling umum dari berpikir. Tingkatan berpikir ketiga yaitu berpikir kritis. Berpikir kritis ditandai dengan kemampuan menganalisis masalah, menentukan kecukupan data untuk menyelesaikan masalah, memutuskan perlunya informasi tambahan, dan menganalisis situasi. Tingkatan berpikir tertinggi yaitu berpikir kreatif. Berpikir kreatif ditandai dengan kemampuan menyelesaikan masalah dengan cara-cara yang tidak biasa, unik, dan berbeda-beda.

Penggunaan kata kovariasi pertama kali digunakan mulai tahun 1991, Rizzuti (Isnaniah, 2019) menyebutkan makna dari fungsi klasik untukmenggambarkan apa yang dimaksud dengan kovariasi, tetapi tidak memberikan definisi formal. Kovariasi adalah aktifitas menghubungkan atau mengkoordinasikan dua variasi atau kuantitas untuk melihat hubungan serta perubahan yang terjadi (Isnaniah, 2019)

Carlson dkk (Umah, As’ari, & Sulandra, 2016) mendefinisikan penalaran kovariasional sebagai aktivitas kognitif yang melibatkan koordinasi dua macam kuantitas yang berkaitan dengan cara-cara dua kuantitas tersebut berubah satu terhadap yang lain. Menurut Subanji (Isnaniah, 2019) dalam penelitiannya menyebutkan, penalaran kovariasional dimaksudkan sebagai aktivitas mental dalam pengkoordinasian dua kuntitas (variabel bebas dan variabel terikat) yang berkaitan dengan cara-cara perubahan satu kuantitas terhadap kuantitas yang lain. Dengan demikian penalaran kovariasi merupakan aktivitas berpikir dengan mengkoordinasikan dua macam kuantitas (variabel bebas dan variabel terikat) untuk dapat memahami perubahan dari satu kuantitas terhadap kuantitas yang lain.

Penalaran kovariasional muncul sebagai teori berdasarkan kerja Jere Confrey dan berdasarkan kerja Patrick Thompson di akhir tahun 1980an dan awal 1990an. Perbedaan antara dua titik awal ini yaitu Confrey berfokus pada nilai variabel berturut-turut, sedangkan Thompson berfokus pada pengukuran sifat-sifat objek. Confrey mengarakterisasi kovariasi sebagai koordinasi nilai-nilai dua variabel sebagaimana nilai variabel tersebut berubah. Confrey & Smithmengidentifikasi dua tipe perubahan konstan yaitu perubahan multiplikatif dan perubahan aditif, dan yang mereka sebut penalaran tentang kovariasi yaitu proses mengoordinasikan tipe-tipe perubahan ini secara iteratif (Umah, 2016).



a b

Gambar 2. 1 Contoh Penalaran Kovariasi

Berdasarkan definisi oleh Confrey & Smith, penalaran kovariasional meliputi memperhatikan bilangan dalam tabel, tetapi tidak memperhatikan apa yang terjadi di antara entri-entri dalam tabel. Mereka tidak memberikan gambaran rinci tentang apa yang terjadi antara nilai berturut-turut pada tabel tersebut sehingga siswa tidak perlu melihat nilai-nilai berpasangan yang kontinu (Umah, 2016).

Dari contoh gambar (2.1,a) variabel sebagai variabel pertama dan variabel sebagai variabel kedua. Pada tabel pertama terlihat bahwa jika bernilai 1 maka bernilai 3, bernilai 2 maka bernilai 5, bernilai 3 maka bernilai 7 sampai jika bernilai 10 maka bernilai 21. Bilangan pada tabel pertama tersebut dapat diselesaikan dengan cara menjumlahkan angka 1 disetiap barisnya secara terus menerus pada kolom variabel . Sedangkan pada kolom variabel dapat diselesaikan dengan cara menjumlahkan angka 2 disetiap barisnya secara terus menerus. Selanjutnya pada tabel kedua (2.1.b) terlihat bahwa jika variabel bernilai 1 maka variabel bernilai 3, bernilai 2 maka bernilai 9, bernilai 3 maka bernilai 27 sampai jika bernilai 10 maka bernilai 59094. Bilangan pada tabel kedua tersebut dapat diselesaikan dengan cara yang sama dengan tabel pertama yaitu pada kolom variabel . Sedangkan pada kolom variabel dapat diselesaikan dengan cara mengalikan angka 3 disetiap barisnya secara terus menerus.

Jika penyelesaian kedua tabel tersebut hanya dengan cara menjumlahkan dan mengalikan secara terus menerus maka tidak tampak hubungan yang terjadi antara variabel dan variabel . Sehingga dapat diselesaikan dengan cara penggunaan suatu pola. Pola yang dapat digunakan dalam tabel pertama tersebut yaitu dengan menggunakan pola . Dengan menggunakan pola ini dapat terlihat jika bernilai 1 maka bernilai 3. Untuk menentukan nilai dapat diselesaikan dengan cara : menghasilkan . Pada tabel kedua dapat dapat menggunakan pola . Dengan menggunakan pola ini terlihat jika bernilai 2 maka bernilai 9. Untuk menentukan nilai dapat diselesaikan dengan cara : menghasilkan . Kedua Pola tersebut berlaku secara terus menerus untuk menentukan nilai yang lainnya. Jika penyelesaian pada kedua tabel tersebut menggunakan pola, maka akan terlihat perubahan nilai pada satu variabel dikoordinasikan dengan perubahan pada variabel lain.

Carlson dkk (Umah, 2016) mendefinisikan penalaran kovariasional sebagai aktivitas kognitif yang melibatkan koordinasi dua macam kuantitas yang berkaitan dengan cara-cara dua kuantitas tersebut berubah satu terhadap yang lain. Penalaran kovariasi memperkenankan siswa mengekstrak pola yang bertambah rumit dalam menghubungkan dan dari tabel nilai dengan cara pikir yang mungkin digunakan siswa untuk memahami apa yang terjadi di antara nilai-nilai tersebut.

### Berpikir *Pseudo* Penalaran Kovariasi

Lithner (2000) mengkarakterisasi proses berpikir dalam menyelesaikan tugas matematika menjadi dua macam, yakni plausible reasoning (PR) dan establish experience (EE). Proses berpikir PR dan EE merupakan perluasan dari analitik dan pseudo analitik yang dikemukakan Vinner. Perbedaan antara analitik dan PR, terletak pada derajat kepastiannya, dimana PR derajat kepastiannya lebih tinggi. Sedangkan perbedaan antara pseudo analitik dan EE adalah derajat keanalitikannya, EE lebih sedikit ketidak analitikannya dibandingkan pseudo analitik.

Proses berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah didiskripsikan oleh Lithner (2000) dalam empat struktur berikut (1) Memahami masalah, masalah yang dihadapi mungkin tidak jelas bagaimana harus diproses; (2) Memilih strategi, seseorang mungkin mencoba untuk memilih (dalam pengertian lebih luas: memilih, mengingat, mengkonstruksi, menemukan, dan sebagainya) suatu strategi yang dapat menyelesaikan kesulitan. Pilihan ini dapat didukung dengan argumentasi yang bersifat prediksi: apakah strategi ini akan menyelesaikan masalah? Jika tidak, memilih strategi yang lain; (3) Implementasi strategi, hal ini didukung dengan argumentasi yang bersifat verifikasi: apakah strategi ini telah mampu menyelesaikan kesulitan? Jika tidak, mengulangi 2 atau 3 tergantung pada pilihan strategi atau dalam implementasi strategi yang masih menjadi masalah. (4) Konsklusi: hasil yang diperoleh.

Struktur 1 – 4 dari proses berpikir siswa tersebut dikatakan sebagai proses berpikir PR bila:

(i) komponen-komponen yang dilibatkan dalam penalaran memuat sifat-sifat matematika

(ii) dimaksudkan untuk memandu ke arah jawaban benar, tidak harus sampai pada jawaban yang lengkap atau benar.

Struktur 1-4 dikatakan sebagai proses berpikir EE bila bagian (i) ditemukan dari pemahaman dan pro-sedur yang didasarkan pada pengalaman yang dimiliki oleh seseorang dari belajar di kelas. Sebagai contoh, ketika mahasiswa diberikan tugas maksimasi dalam kalkulus, proses berpikir PR mungkin dapat terjadi seperti berikut.

1. Situasi masalah: T adalah tugas maksimasi dalam kalkulus. Apa yang harus dikerjakan untuk menyelesaikan T?

2. Memilih strategi: Bila seseorang melihat grafik sebuah fungsi sebagai bukit dan lembah, maksimum ditemukan di puncak bukit. Di puncak kemiringannya nol, dan kemiringan didiskripsikan sebagai turunan. Jadi T diselesaikan dengan menguji titik dimana f”(x) = 0.

3. & 4. Implementasi strategi dan kesimpulan. Jika seseorang sudah terbiasa dengan prosedur ini, maka ia akan langsung menggunakannya.

 Sedangkan proses berpikirEE dapat terjadi bila dalam memilih strategi (bagian 2): penyelesaian semua tugas maksimasi adalah menemukan di mana f’(x) = 0. Jadi T diselesaikan dengan menemukan dimana f’(x) = 0

Dalam konteks penalaran kovariasi, setelah subyek melakukan operasi aljabar terhadap rumus volume bola dan tabung, ternyata tidak bisa menghasilkan grafik, maka berlanjut pada proses berpikir kedua: mengkaji hubungan antara perubahan ketinggian dan volume air. Dari pernyataan yang dituliskan dalam jawaban terlihat bahwa dia telah men-dapatkan hubungan antara tipe dan struktur (volume dan ketinggian). Semakin banyak air yang dimasukkan ke dalam botol, ketinggiannya semakin besar (meningkat). Dalam hal ini subyek telah melakukan proses penalaran kovariasional, namun masih belum sempurna, karena dia masih belum memperhatikan cara-cara perubahan ketinggian terhadap volume secara teliti. Proses berpikir yang terjadi masih dangkal, hanya memandang: ketika volume ditambah, maka ketinggian bertambah. Sehingga proses penalaran kovariasionalya masih semu (pseudo penalaran kovariasi) pada tingkatan EE.

Kemampuan penalaran tentang kovariasi didefinisikan secara formal oleh Carlson (Subanji, 2011) sebagai aktivitas kognitif yang melibatkan pengkoordinasian dua macam kuantitas yang berkaitan dengan cara-cara dua kuantitas tersebut berubah satu terhadap yang lain, dan mereka menyebutnya dengan istilah “penalaran kovariasional”. Penalaran *pseudo* adalah penalaran yang semu. Proses penalaran *pseudo* merupakan proses berpikir yang nampak “seperti” proses penalaran, namun sebenarnya belum merupakan proses penalaran, karena tidak menggunakan proses berpikir yang logis atau bersifat analitis(Subanji, 2011: 6).

Selanjutnya *pseudo* dalam penalaran kovariasional atau *pseudo* penalaran kovasiasional diartikan sebagai kovariasional yang semu. Seseorang yang berada pada penalaran kovariasional *pseudo*, dia terlihat seperti bernalar kovariasional (mengkoordinasikan perubahan satu variabel terhadap variabel lain), namun penalaran kovariasionalnya masih semu. Dalam hal ini penalaran kovariasional semu siswa adalah penalaran kovariasional sebelum refleksi, bahwa siswa memberikan jawaban salah, namun sebenarnya siswa tersebut mampu menyelesaikannya secara benar setelah refleksi(Subanji, 2011 : 7).

Dalam menyelesaikan suatu masalah, terdapat beberapa kemungkinan jawaban yang terjadi pada siswa. Untuk siswa yang memberikan jawaban benar dan mampu memberikan justifikasi, berarti jawabannya “betul sungguhan”, hal ini sudah wajar. Sebaliknya, siswa yang menunjukkan jawaban benar, tetapi tidak mampu memberikan justifikasi terhadap jawabannya, maka kebenaran jawabannya hanya “kebetulan”. Sedangkan siswa yang menunjukkan jawaban salah dan setelah refleksi tetap menghasilkan jawaban salah, berarti penalaran siswa tersebut memang “salah sungguhan”. Perilaku lain yang mungkin adalah siswa memberikan jawaban salah, tetapi setelah melakukan refleksi mampu membenahinya sehingga menjadi jawaban benar. Ini berarti penalaran siswa (sebelum refleksi) tersebut masih belum sungguhan (atau masih *pseudo*). Selanjutnya perilaku siswa ini disebut penalaran kovariasional *pseudo* dari jawaban “salah” (Subanji, 2011).

### 2.6Limit Fungsi

1. **Definisi Limit Fungsi**

Limit dapat diartikan sebagai menuju suatu batas, sesuatu yang dekat namun tidak dapat dicapai. Dalam bahasa matematika, keadaan ini dapat disebut limit. Mengapa harus ada limit? limit menjelaskan suatu fungsi jika batas tertentu didekati. Mengapa harus didekati? karena suatu fungsi biasanya tidak terdefinisi pada titik-titik tertentu. Walaupun suatu fungsi seringkali tidak terdefinisi untuk titik tertentu, namun masih dapat dicari tahu berapa nilai yang didekati oleh fungsi tersebut apabila titik tertentu semakin didekati yaitu dengan limit.

Dalam bahasa matematika, limit dituliskan dengan:

Maksudnya, apabila *x* mendekati *a* namun *x* tidak sama dengan *a* maka *f(x)* mendekati *L.* Pendekatan *x* ke *a* dapat dilihat dari dua sisi yaitu sisi kiri dan sisi kanan atau dengan kata lain *x* dapat mendekati dari arah kiri dan arah kanan sehingga menghasilkan limit kiri dan limit kanan.

Pengertian tentang limit di atas dapat diperoleh dengan melihat contoh berikut:

Untuk nilai x yang mendekati 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 0 | 0,9 | 0,95 | 0,98 | ... | 1,0001 | 1,0005 | 1,05 | 1,1 |
| f(x) | 1 | 1,9 | 1,95 | 1,98 | ... | 2,0001 | 2,0005 | 2,05 | 2,1 |

Berikut gambar grafiknya:

 Y

 1

 1 x

Berdasarkan gambar grafik diatas dapat dijelaskan:

* Apabila x mendekati 1 dari kiri, maka nilai f(x) mendekati 2
* Apabila x mendekati 1 dari kanan, maka nilai f(x) mendekati 2
* Jadi, apabila x mendekati 1, maka nilai f(x) mendekati 2

Teorema/ Pernyataan :

Suatu fungsi dikatakan mempunyai limit apabila antara limit kiri dan limit kannya mempunyai besar nilai yang sama dan apabila limit kiri dan limit kanan tidak sama maka nilai limitnya tidak ada.

### Limit Fungsi Aljabar

Materi limit Matematika yang pertama akan saya jelaskan ialah materi limit fungsi aljabar. Limit fungsi aljabar dapat dioperasikan menggunakan beberapa teorema atau hukum limit tertentu. Apabila fungsi yang mempunyai nilai limit (fungsi *f, k* konstanta dan fungsi *g*) mendekati bilangan *c,* maka dapat dinyatakan dalam bentuk sistematis seperti di bawah ini:

 =

Teorema limit di atas merupakan sifat sifat limit fungsi aljabar yang harus anda pahami. Selain itu dalam limit fungsi Matematika juga terdapat beberapa cara menyelesaikan limit fungsi aljabar. Adapun beberapa metode pengerjaan limit aljabar yaitu sebagai berikut:

1. **Metode Penyelesain Limit Fungsi Aljabar**
2. **Metode Substitusi**

Metode penyelesaian limit fungsi aljabar yang pertama ialah metode substitusi. Metode limit tersebut dilakukan dengan cara langsung mensubstitusikan nilai ke fungsi *f(x).* Metode ini memiliki syarat atau ketentuan yaitu nilai tak tentu tidak dibentuk dari hasil substitusi tersebut. Adapun contoh soal limit fungsi aljabar menggunakan metode substitusi yaitu sebagai berikut:

1. **Metode Pemfaktoran**

Metode penyelesaian limit fungsi aljabar selanjutnya ialah metode pemfaktoran. Apabila nilai bentuk tak tentu dihasilkan dari metose subtsitusi seperti *0/0, 0 x ∞, 0* pangkat *0, ∞* pangkat *∞, ∞, ∞/∞, ∞ - ∞,* atau ∞ pangkat 0, maka terlebih dahulu harus memfaktorkan fungsi tersebut sehingga tidak berbentuk tak tentu. Setelah itu menggunakan metode substitusi pada *x→c.* Adapun contoh soal limit fungsi aljabar menggunakan metode pemfaktoran yaitu sebagai berikut:

1. **Metode Perkalian Akar Sekawan**

Metode penyelesaian limit fungsi aljabar selanjutnya ialah metode perkalian akar sekawan. Dalam rangkuman materi limit fungsi Matematika ini biasanya menggunakan metode tersebut apabila hasil nilai limit pada metode substitusi langsung bilangan irasional. Supaya limit tersebut bentuknya tidak irasional maka harus dikalikan dengan akar sekawannya. Untuk itu nilai *x→c* dapat langsung disubstitusikan lagi. Adapun contoh soal materi limit fungsi aljabar menggunakan metode perkalian akar sekawan yaitu sebagai berikut:

Dalam materi limit fungsi aljabar terdapat operasi bilangan yang nilai x nya terkadang dekat dengan bilangan tak hingga *(∞).* Untuk itu hasil nilainya tidak akan tentu jika fungsi tersebut disubstitusikan. Pengoperasian limit ini menggunakan beberapa teorema atau sifat sifat fungsi tertentu. Jika fungsi fungsi nilai limit yang dimiliki berupa k konstanta, fungsi *g, n* bilangan bulat dan fungsi *f*mendekati bilangan *c,* maka dapat menggunakan beberapa teorema limit fungsi aljabar seperti di bawah ini:

Teorema limit di atas merupakan sifat sifat limit fungsi aljabar tak hingga yang harus anda pahami. Selain itu dalam rangkuman materi limit fungsi Matematika juga terdapat beberapa cara menyelesaikan limit fungsi aljabar tak hingga. Adapun beberapa metode pengerjaan limit fungsi tak hingga yaitu sebagai berikut:

1. **Metode Penyelesaian Limit Fungsi Tak Hingga**
2. **Membagi Dengan Pangkat Tertinggi**

Untuk bentuk limit fungsi ini biasanya menggunakan metode pembagian dengan pangkat tertinggi. Untuk itu dalam pengerjaannya, pangkat *xⁿ* akan membagi pembilang *f(x)* dengan penyebut *g(x)* nya, dimana *n* adalah pangkat dari fungsi *f(x)* dan *g(x)* yang paling tinggi. Setelah itu *x→c* akan disubstitusikan. Adapun contoh soal limit fungsi tak hingga yaitu sebagai berikut:

1. **Mengalikan Bentuk Sekawan**

Metode pengerjaan limit fungsi tak hingga selanjutnya ialah metode pengalian bentuk sekawan. Metode ini berguna untuk bentuk limit fungsi. Untuk itu cara mengerjakan limit tersebut menggunakan sifat limit fungsi aljabar seperti di bawah ini:

Lalu dilanjutkan dengan pembagian dengan metode pertama yakni membagi dengan pangkat tertinggi. Sebagai contoh:

Berikutnya pembilang dan penyebut dibagi pada x pangkat tertinggi yakni x1:

**2.7 Kemampuan Awal Matematika ( KAM)**

Menurut Muchlisin, (2010 : 8) Kemampuan awal matematika adalah suatu kesanggupan yang dimiliki pesera didik baik alami maupun yang dipelajari untuk melaksanakan suatu tindakan tertenu secara historis dimana mereka memberikan respon yang positif atau negatif terhadap objek tersebut dengan menggunakan penalaran dan cara-cara berpikir logis,analisis, sestematis, kritis,kreatif, dan inovatif serta menekankan pada penguasaan konsep dan algoritma disamping kemampuan pemecahan masalah. Oleh karena itu. Sebelum guru memberikan materi yang baru, terlebih dahulu guru harus mengetahui apakah siswa sudah memahami konsep dasar sebelumnya atau tidak. Seorang guru harus menanyakan atau mendeteksi pengetahuan dasar pada peserta didik sebagai langkah awal untuk mempelajari, menyelesaikan dan memperbaiki permasalahan yang terjadi didalam kelas.

Kemampuan awal matematika bertujuan untuk mengetahui kemampuan siswa secara umum sebelum pembelajaran berlangsung, mengetahui kesetaraan rata-rata nilai siswa dan untuk mengelompokan siswa berdasarkan kemampuan awal matematisnya.

Pengelompokan siswa berdasarkan KAM dilakukan bertujuan untuk mengetahui pengetahuan siswa sebelum pembelajaran dan digunakan sebagai dasar pengelompokan siswa berdasarkan kemampuan awal matematisnya. Kemampuan awal matematis siswa diukur melalui hasil ulangan harian, ujian tengah semester dan ujian semester, kategori pengelompokan siswa berdasarkan KAM dari rataan dan standar deviasi (Arikunto, 2013).

**2.8 Penelitian yang Relevan**

Beberapa hasil penelitian yang relevan sebagai penguat penelitian terkait dengan berpikir *pseudo*siswa.

1. Penelitian yang telah dilakukan oleh Husnah (2018) tentang Analisis berpikir *pseudo* terkait kemampuan pemecahan masalah berdasarkan kemampuan matematika. Hasil penelitiannya mengungkapkan bahwa: 1) Berpikir *pseudo* siswa yang berkemampuan matematika rendah dalam memecahkan masalah perbandingan adalah saat memahami masalah siswa hanya memahami masalah yang dituliskan saja. Saat merencanakan pemecahan masalah siswa hanya menyebutkan bahwa rencananya yaitu memecahkan masalah seperti sebelumnya. Saat melaksanakan rencana pemecahan masalah siswa memecahkan masalah meniru gurunya. Saat memeriksa kembali hasil yang diperoleh siswa tidak dapat memperbaiki jawaban yang sudah diperoleh, 2) Berpikir *pseudo* siswa yang berkemampuan matematika sedang dalam memecahkan masalah perbandingan adalah saat memahami masalah siswa sudah memahami masalah yang dituliskan, namun pemahamannya bersifat *spontan* dan dangkal. Saat merencanakan pemecahan masalah siswa merencanakan konsep yang akan digunakan, namun tidak memiliki alasan memilih konsep tersebut. Saat melaksanakan rencana pemecahan masalah siswa memecahkan masalah meniru gurunya. Saat memeriksa kembali hasil yang diperoleh siswa tidak dapat menjelaskan dan menjustifikasi hasil yang sudah diperoleh, dan 3) Berpikir *pseudo* siswa yang berkemampuan matematika tinggi dalam memecahkan masalah perbandingan adalah saat memahami masalah siswa sudah memahami maksud dari masalah, sehingga mampu menyebutkan informasi lain yang dibutuhkan dari masalah. Saat merencanakan pemecahan masalah siswa mampu menyebutkan konsep yang digunakan serta mampu memberikan penjelasan alasan memilih konsep tersebut. Saat melaksanakan rencana pemecahan masalah siswa memecahkan masalah sesuai dengan tahapan konsep yang sudah direncanakan. Saat memeriksa kembali hasil yang diperoleh siswa dapat menjelaskan dan menjustifikasi jawaban yang sudah diperoleh.
2. Penelitian yang dilakukan oleh Zahir (2019) tentang Restrukturisasi proses berpikir *pseudo* siswa dalam menyelesaikan masalah matematika pada materi garis singgung lingkaran. Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa menunjukkan (1) Berpikir *pseudo* dalam memecahkan masalah garis singgung lingkaran adalah saat memahami masalah siswa mampu mengungkapkan informasi yang diketahui dan yang ditanyakan. Pada merencanakan penyelesaian masalah siswa tidak mampu menyebutkan rencana yang akan digunakan untuk menyelesaikan masalah, hanya mengungkap konsep. Pada tahap melaksanakan rencana penyelesaian masalah siswa hanya mampu menyelesaikan masalah menggunakan konsep yang dianggapnya benar sesuai dengan contoh gurunya. Pada tahap melakukan pengecekan kembali siswa belum mampu membenarkan jawabannya yang benar. Namun setelah mendapatkan restrukturisasi siswa dapat membenarkan kesalahan setelah memahami konsep dengan benar. (2) Penerapan restrukturisasi pada siswa yang mengalamai pseudo berpikir dapat memberikan penataan struktur berpikir yang awalnya kurang dan sempit menjadi struktur berpikir yang lengkap, sehingga siswa dapat menyelesaikan masalah matematika dengan terstruktur dan benar.
3. Penelitian yang dilakukan oleh Mufida (2018) tentang Identifikasi faktor penyebab berpikir *pseudo* siswa dalam menyelesaikan masalah matematika pada materi pertidaksamaan eksponen. Hasil penelitiannya mengungkapkan bahwa Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa faktor penyebab siswa berpikir *pseudo* dalam menyelesaikan masalah pertidaksamaan eksponen terdiri dari 3 faktor yaitu: (1) Faktor kurangnya pemahaman dari materi prasyarat dan kurangnya persiapan sebelum pembelajaran matematika, sehingga merupakan faktor yang paling dominan; (2) Faktor sikap dan kebiasaan siswa yang kurang baik; dan (3) Faktor mudah menyerah dan kurang percaya diri. Adapun faktor-faktor lain yang tidak termasuk atau tidak dapat dijelaskan dalam penelitian ini.
4. Penelitian yang dilakukan oleh Nur (2013) tentang faktor-faktor penyebab berpikir *pseudo* dalam menyelesaikan soal-soal kekontinuan fungsi linier dengan berdasarkan gaya kognitif mahasiswa. Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa: (1) faktor-faktor penyebab berpikir *pseudo* pada mahasiswa berdasarkan gaya kognitif FI (*field independent*) adalah (a) pada mahasiswa gaya kognitif FI kategori 1, berpikir pseudo disebabkan oleh hilangnya tahap kontrol individu, belajar hafalan, dan faktor kebiasaan, (b) pada mahasiswa gaya kognitif FI kategori 2, berpikir pseudo disebabkan oleh hilangnya tahap kontrol individu, dan belajar hafalan.(c) pada mahasiswa gaya kognitif FI kategori 3, berpikir pseudo disebabkan oleh kurangnya komitmen kognitif, dan kurangnya pemahaman konsep. (2) faktor-faktor penyebab berpikir pseudo pada mahasiswa gaya kognitif FD (*field dependent*) adalah (a) pada mahasiswa gaya kognitif FD kategori 1, berpikir pseudo disebabkan oleh belajar hafalan dan kurangnya pemahaman konsep prasyarat. (b) pada mahasiswa gaya kognitif FD kategori 2, berpikir pseudo disebabkan oleh kurangnya komitmen kognitif, hilangnya tahap kontrol individu, dan belajar hafalan. (c) pada mahasiswa gaya kognitif FI kategori 3, berpikir pseudo disebabkan oleh kurangnya komitmen kognitif, dan belajar hafalan. Berdasarkan hasil penelitian ini, satu-satunya perbedaan yang terlihat yaitu pada faktor kebiasaan yang menyebabkan berpikir pseudo pada mahasiswa gaya kognitif FI.
5. Penelitian yang dilakukan oleh Hukom (2018) tentang Analisis kesalahan berpikir *pseudo* siswa dalam mengonstruksi Konsep pada materi fungsi dengan hasil penelitiannya menunjukkan bahwa kesalahan berpikir *pseudo* siswa dalam mengonstruksi konsep fungsi, diperoleh subjek 1 (S1) dalam proses mengonstruksi konsep fungsi, S1 memenuhi indikator berpikir *pseudo-*benar, yaitu S1 mampu memberikan jawaban yang benar namun alasan yang diberikan salah. Dan pada subjek 2 (S2) juga memenuhi indikator berpikir *pseudo-*salah, yaitu S2 memberikan jawaban yang salah, namun setelah dilakukan refleksi S2 mampu memperbaikinya menjadi jawaban yang benar.

Berdasarkan hasil penelitian-penelitian yang sebelumnya, telah dilakukan penelitian tentang berpikir *pseudo*. Dari hasil penelitian, pada saat pembelajaran memungkinkan siswa melakukan proses berpikir *pseudo*. Untuk itu, peneliti tertarik untuk mengkaji mengenai berpikir *pseudo* penalaran kovariasi siswa pada materi limit fungsi. Namun, yang membedakan penelitian ini dengan peneliatian yang sebelumnya adalah dari segi berpikir *pseudo* penalaran kovariasi, segi materi, tempat dan waktu penelitian. Oleh sebab itu, penelitian ini nantinya dapat dijadikan sebagai referensi untuk peneliti selanjutnya dan juga untuk para pendidik dapat mengantisipasi terjadi berpikir *pseudo* pada siswa.

## Kerangka Pemikiran

Kesimpulan

Limit Fungsi

Berpikir *Pseudo*

Proses Berpikir

Penalaran Kovariasi

Proses Benalar

Proses merespon atau memikirkan secara mental terhadap informasi

Aktifitas berpikir dengan mengkoordinasikan dua macam kuantitas

Pola berpikir logis atau proses berpikirnya Analitis

*Pseudo* Penalaran Kovariasi

Penerapan Limit

fungsi

Sesuatu yang semu (pemikiran yang seakan-akan benar)

*Pseudo* benar

*Pseudo* salah

*Pseudo*Analitik

*Pseudo* Konseptual

Gambar 2. 2 Skema Kerangka Berpikir

# Penelitian ini berangkat dari kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep limit fungsi siswa mengalami berpikir *pseudo*Penyebab dari *pseudo*yang dialami siswa diantaranya dilihat dari sisi cara proses berpikir, penalaran kovariasi, dan proses benalarnya. Dimana proses berpikir adalah proses merespon atau memikirkan secara mental terhadap informasi selanjutnya penalaran kovariasi adalah aktifitas berpikir dengan mengkoordinasikan dua macam kuantitas. Dan begitu juaga dengan proses bernalar adalah pola berpikir logis atau proses berpikirnya analitis sehingga terjadilah *pseudo* penalaran kovariasi.